

I-132

分布荷重をうける薄い弾性基盤上の平板

野村総研 正会員 村上 泰一
北大工学部 正会員 蕪澤 憲吉

1. はじめに

Winkler¹⁾は復元力は梁のたわみに比例すると仮定し、弾性基盤上での梁のたわみをはじめて解いた。この理論は弾性基盤のポアソン比が大きい場合不精確であるが、簡単に解が得られるためこの問題にはよく用いられる。それに対しD. A. Dillard²⁾は弾性基盤の体積変化のない性質に注目し³⁾、集中荷重をうける正方形板のたわみについて研究している。本研究ではD. A. Dillardの理論を分布荷重をうける平板に適用して、そのたわみ性状を検討する。

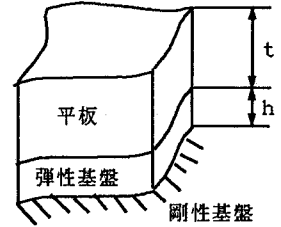


Fig. 1 薄い弾性基盤上の平板

2. D. A. Dillardの式誘導²⁾

Fig. 1に本研究の一般的モデルを図示した。ここで弾性基盤の体積変化はなく、その厚さは平板の寸法と比較して十分に小さいとし、また表面は滑らないと仮定する。

古典的平板理論は(1)式に従い、Winklerは $q=kW$ (k :弾性基盤のばね定数)とした。それに対しD. A. Dillardは次のようにした。

$$\nabla^4 w = \frac{(p-q)}{D}$$

(W :平板のたわみ p :分布荷重 q :弾性基盤の復元力 D :平板の曲げ剛性)

$$\text{ここで } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Fig. 2 微小要素とそのたわみ

Fig. 2に、平板がたわむ前と後の平板と基盤の微小部分を図示する。平板のたわみは弾性基盤の厚さに比べ十分に小さいとする。弾性基盤の厚さは十分に薄いので弾性基盤中のある点での応力は全方向に等しいと仮定する。さらに弾性基盤の体積変化のない性質により弾性基盤の側面は放物線状に膨らむと仮定する。³⁾これらより弾性基盤の体積変化のない性質は、 x と y 方向での放物線の頂点の変位 $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$ を用いて(2)式のようにあらわせる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{3w}{2h} \quad (2)$$

この変形により弾性体内に応力を生じ、次式であらわされる。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{8G}{h^2} u \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{8G}{h^2} v \quad (3)$$

ここで、 σ_x と σ_y は直応力、 G は弾性体の弾性係数である。先の仮定より、 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -q$ とする。(3)式をおのおの(2)式に代入して(4)式を得る。

$$\nabla^2 q = -\frac{12Gw}{h^3} \quad (4)$$

(1)式のラプラシアン重調和関数を(4)式に代入すると(5)式を得る。

$$\nabla^4 w - \lambda^2 w = \frac{1}{D} \nabla^2 p \quad \text{ここで } \lambda^2 = \frac{12G}{Dh^3} \quad (5)$$

3. 解析モデル

四辺単純支持正方形板の中心にFig. 3のような集中荷重($P=1.0\text{N}$)、分布荷重($q=1.0\text{Pa}$)をそれぞれかけてNavierの解法⁴⁾で解析する。弾性基盤はゴム($G=1.3\text{MPa}$, $h=0.02\text{m}$)、平板は鋼板($E=210\text{GPa}$, $\nu=0.3$, $t=0.02\text{m}$)とし、平板の辺長を順次変化させて解析を行った。

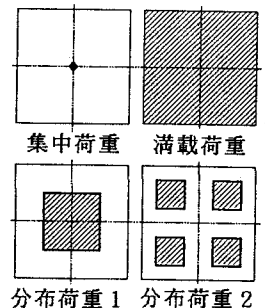
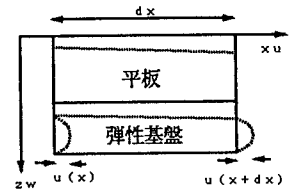


Fig. 3 解析モデル

4. 比較のためのWinklerのばね定数の検討

二つの理論による解析を数値的に比較するために、y方向に無限な半無限板の中心に線荷重をかけ、二つの理論による半無限板の中心のたわみの値を等しいとおく。これによりWinklerのばね定数は次式のように導かれた。

$$k = \left(\frac{36}{4^{1/4}} \frac{G}{\lambda^3 h^3 D^{1/4}} \right)^{4/3}$$

5. 解析結果と考察

平板の中心のたわみを Fig. 4 に示す。ただし分布荷重 1 の Fig. 4(b)、(c) の α は分布荷重の幅と平板の辺長の比であり、この α を変化させて解析した。Fig. 4(d) の分布荷重 2 は分布荷重の中心のたわみも描いた。また、Fig. 5 は分布荷重 2 における一辺 3.0m の正方形の 1/4 の範囲を CG で描いた図である。このときの一つの分布荷重の幅は平板の辺長の 1/4 である。Fig. 6 は Fig. 5 の Dillard の理論による弾性基盤の XY 平面方向の変位の図である。Fig. 4 より Dillard と Winkler の理論の平板の中心のたわみの挙動に明らかな違いが二つあることがわかる。まず一つは辺長が大きくなるにしたがい収束するたわみの値が異なること、もう一つは Dillard の理論によるのたわみのグラフは明確なピークをもつが、Winkler にはピークがないことである。

板全体においても Fig. 5 のように Dillard の理論の平板全体の变形は分布荷重の四隅で最大たわみとなり、分布荷重の中心およびその周辺で盛り上がる。これは、Fig. 6 の弾性基盤の XY 平面方向の変位図から理解される。すなわち弾性基盤の XY 平面方向の歪が分布荷重の中心や周辺に集中し、弾性基盤は XY 方向に圧縮されている。一方 Z 方向には弾性基盤の体積変化のない性質の仮定により弾性基盤は膨張する。これに対し Winkler の理論では分布荷重を受けている範囲内でほぼ等しくたわんでいるだけである。

6. 結論

Dillard と Winkler の理論は分布荷重を受ける平板の挙動に関して大きく異なることがわかった。これより弾性基盤をばねとして扱うだけでなく、弾性基盤の特徴を考慮してこの問題を解く必要があると考える。

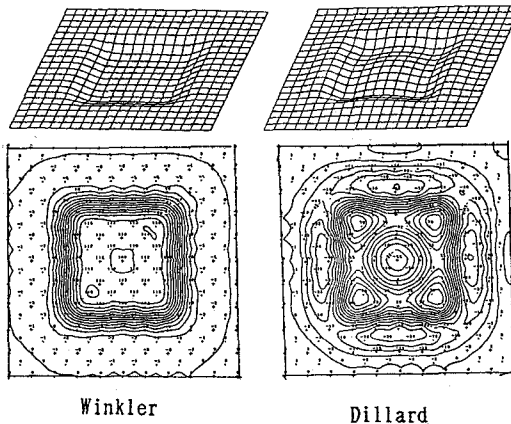
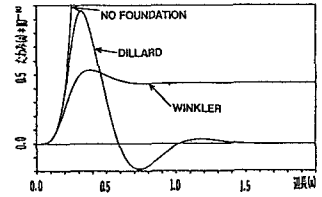
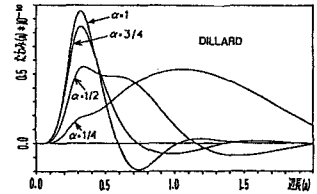


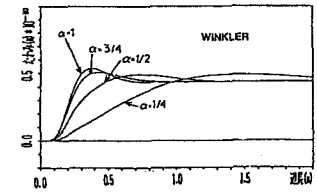
Fig. 5 分布荷重 2 のときの平板のたわみ



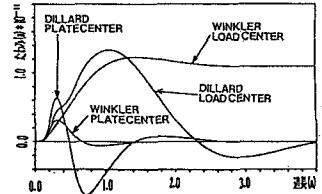
(a) 満載荷重



(b) 分布荷重 1 (Dillard)



(c) 分布荷重 1 (Winkler)



(d) 分布荷重 2

Fig. 4 平板の中心のたわみ

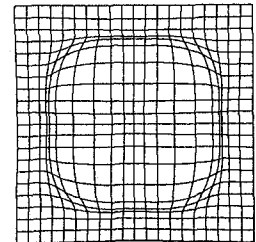


Fig. 6 弾性基盤の XY 平面方向の変位

(参考文献) 1) Winkler E.: "Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit", p. 182, Prag, 1867. 2) D.A. Dillard: "Bending of Plates on Thin Elastic Foundations", ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 56, pp. 382-386, JUNE 1989. 3) Gent A.N. and Meinecke E.A.: "Compression, Bending and Shear of Bonded Rubber Blocks", Polymer Engineering and Science, vol. 10, No. 1, pp. 48-53, 1970. 4) Timoshenko S. and Woinowsky-Krieger S.: "Theory of Plates and Shells, 2nd ed", McGraw-Hill, New York, 1959.