I-130

変厚偏平シェルの曲げ解析

長崎大学　○正　員　松田　浩
長崎大学　　正　員　森田千尋
長崎大学　　正　員　崎山　毅
九州大学　　正　員　若菜啓孝

１．まえがき

本報告は，基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより変厚偏平シェルの解析的近似解を求め，これに基づく偏平シェルの解法を提示したものである。①任意の境界条件，荷重条件および変断面性をもつ偏平シェルに対しては，偏平シェルの縦横の等分割線の交点における基礎微分方程式の解析的近似解が求められる。一方，②境界条件が対辺単純支持他対辺任意で，断面変化も単純支持辺に沿って，一方向に変化する偏平シェルに対しては，連立偏微分方程式で表わされた基礎微分方程式を一軸方向に級数展開して連立常微分方程式に変換後，さらに積分方程式に変換し積分方程式の近似解法を応用することにより，基礎微分方程式の近似解が求められる。②の方法は，有限要素法に対する有限帯板法に類似するものである。以下に解析方法ならびに数値計算例を示す。

２．偏平シェルの基礎微分方程式

右手系直交座標系を考え，曲面板の変位，断面力および曲面板に作用する外力を定義する。曲面のｘ，ｙ方向の曲率をk_x, k_y，ねじれ率をk_{xy}とし，これらがあまり大きくなく，投影形状が矩形の曲面板を考えると，せん断変形の影響を考慮した変厚偏平シェルの曲げの基礎微分方程式は次式のように表せる。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - k_x Q_x + q_x = 0 \qquad (1\text{-}1)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - k_y Q_y + q_y = 0 \qquad (1\text{-}2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_x N_x + k_y N_y + 2k_{xy} N_{xy} + q_z = 0 \qquad (1\text{-}3)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0 \qquad (1\text{-}4)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0 \qquad (1\text{-}5)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \frac{M_x}{D} \qquad (1\text{-}6)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{M_y}{D} \qquad (1\text{-}7)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{2M_{xy}}{D(1-\nu)} \qquad (1\text{-}8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x = \frac{Q_x}{\kappa G h} \qquad (1\text{-}9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y = \frac{Q_y}{\kappa G h} \qquad (1\text{-}10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x + \nu k_y) w = \frac{N_x}{F} \qquad (1\text{-}11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - (k_y + \nu k_x) w = \frac{N_y}{F} \qquad (1\text{-}12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w = \frac{2N_{xy}}{F(1-\nu)} \qquad (1\text{-}13)$$

ここに，$q_x=q_x(x,y)$, $q_y=q_y(x,y)$, $q_z=q_z(x,y)$：面に対する接線方向および垂直方向荷重強度，E:弾性係数，$G=E/2(1+\nu)$：せん断弾性係数，ν：ポアソン比，$h=h(x,y)$：板厚，$D=D(x,y)=Eh^3/12(1-\nu^2)$：板の曲げ剛度，$F=F(x,y)=Eh/(1-\nu^2)$：板の伸び剛度，$\kappa=5/6$：せん断修正係数，$k_x, k_y, k_{xy}$：各軸方向の曲率およびねじれ率

３．基礎微分方程式の解析的近似解

①　式(1)を無次元化し，積分方程式への変換と積分方程式の近似解法を応用することにより変厚偏平シェルの任意の離散点における解析的近似解は次式のように求められる。

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^{10} \left\{ \sum_{k=0}^{i} a_{pijkd} X_{rk0} + \sum_{\ell=0}^{j} a_{pij\ell d} X_{s0\ell} \right\} + q_{pij} \qquad (2)$$

②　ｙ方向に級数展開することを考慮すると，式(1)は $Q_x, M_{xy}, M_x, \theta_y, \theta_x, w, v, u, N_{xy}, N_x$ を独立変数とする次式で与えられる。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = -\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + k_x Q_x - q_x \quad (3\text{-}1)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} = -\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + k_y Q_y - q_y \quad (3\text{-}2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = -\frac{\partial Q_y}{\partial y} - k_x N_x - k_y N_y - 2k_{xy} N_{xy} - q_z \quad (3\text{-}3)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = -\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \quad (3\text{-}4)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} = -\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y \quad (3\text{-}5)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = -\nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{M_x}{D} \quad (3\text{-}6)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial x} = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{2M_{xy}}{D(1-\nu)} \quad (3\text{-}7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{Q_x}{\kappa G h} \quad (3\text{-}8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x + \nu k_y) w = \frac{N_x}{F} \quad (3\text{-}9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + 2k_{xy} w + \frac{2N_{xy}}{F(1-\nu)} \quad (3\text{-}10)$$

Qy,My,Ny に対しては次式で定義される。

$$Q_y = \kappa G h \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y\right) \qquad M_y = D(1-\nu^2)\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \nu M_x \qquad N_y = F(1-\nu^2)\left(\frac{\partial v}{\partial y} - k_y w\right) + \nu N_x \quad (4)$$

y=0,b が単純支持であることを考慮して，式(3)の独立変数を次のように仮定する。

$$Q_x = \sum_m Q_x(x)\sin\alpha_m y \quad M_{xy} = -\sum_m M_{xy}(x)\cos\alpha_m y \quad M_x = \sum_m M_x(x)\sin\alpha_m y \quad \theta_y = -\sum_m \theta_y(x)\cos\alpha_m y \quad \theta_x = \sum_m \theta_x(x)\sin\alpha_m y$$

$$w = \sum_m w(x)\sin\alpha_m y \quad v = -\sum_m v(x)\cos\alpha_m y \quad u = \sum_m u(x)\sin\alpha_m y \quad N_{xy} = -\sum_m N_{xy}(x)\cos\alpha_m y \quad N_x = \sum_m N_x(x)\sin\alpha_m y \quad (5)$$

ここに，$\alpha_m = (2m-1)\pi/b \ (m=1,2,\ldots,n)$

式(5)を式(3)に代入し，三角級数関数の直交性を考慮してｙ方向に積分すると，連立偏微分方程式は連立常微分方程式に変換される。この連立常微分方程式を無次元化したのち，積分方程式への変換と積分方程式の近似解法を応用することにより，任意の線要素における解析的近似解は次のように求められる。

$$X_{p1} = \sum_{d=1}^{8} a_{p1d} X_{d0} + q_{p1} \quad (6)$$

４．数値計算例　本法の偏平シェル問題への適用性を調べるために，等分布荷重を受ける周辺単純支持された偏平円筒シェルの解析を，①の方法により行った。図１に対称軸線上のたわみw，曲げモーメントMx，面内力Nxおよび境界辺上の面内力Nxyの数値解析結果を級数解とともに示す。なお，解析結果は２軸対称性を考慮して４分の１部分の６×６分割したものである。

参考文献

(1)若菜他：偏平殻の曲げおよび自由振動問題に関する一解析法,構造工学における数値解析法ｼﾝﾎﾟｼﾞｳﾑ,14,1990 (2)末岡他：ﾊｲﾌﾞﾘｯﾄﾞ型ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙｴﾈﾙｷﾞｰの原理に基礎をおく平板の曲げ問題に対する一近似解析法とその偏平殻への応用,建築論集,343,1984 (3)T.Kant,et-al:Mindlin plate analysis by segmentation method, ASCE,EM109,1983

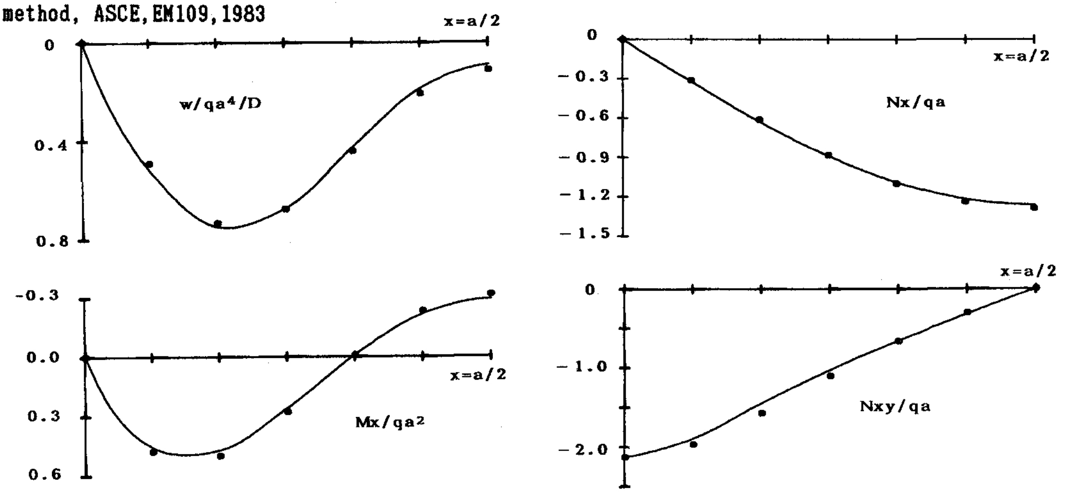

図１