

北海道大学工学部 学生員 田尻 太郎

北海道大学工学部 正 員 芳村 仁

1. はじめに

本文の目的は、曲げを受ける等方性平板の境界要素法において、境界積分の収束を示す事にある。境界要素法は数値的なグリーン関数法と言える。グリーン関数は影響関数であり、本来のグリーン関数法では境界条件を満たす影響関数を用いる事が多いので、それに荷重の重みをかけて積分すれば、板任意点での解が得られる。境界要素法では、必ずしも境界条件を満たさない影響関数を使うため、逆に境界条件を満たす境界未知量を定める事が目標となり、もとの方法より実際の適用範囲は広い。具体的に書けば、次式である：

$$c(x, y) w(x, y) = \iint \rho(\xi, \eta) w^* d\xi d\eta - \int (wV^* - Vw^*) ds + \int (TM^* - MT^*) ds + \Sigma (wF^* - Fw^*) \quad (1)$$

ここで (x, y) は観測点、 c は形状係数、 (ξ, η) は影響関数の仮想荷重の着力点、 w, V, T, M, F はそれぞれ変位、相当剪断力、撓み角、曲げモーメント、角の集中反力、 ρ は荷重密度、 $\int ds$ は境界上線積分、 $\iint d\xi d\eta$ は面積分である。 $*$ 付きの量は、影響変位 w^* から導かれる境界量。 $w^* \sim F^*$ は、 (x, y, ξ, η) の関数であり、本来のグリーン関数法に右辺2項目以下はない。上式を実際に解くには有限要素法の離散化手法を利用して連立一次方程式へ持ち込むが、境界だけに節点を設け要素分割すればよいので、入力手間・計算時間が大いに省かれ、パソコンによる対応も可能である。

2. 積分記号下の微分

ところで曲げ問題は、境界量が四つあるため上式に支持条件を代入しても、未知量が二つ残り、上式だけでは解けない。そこで上式を観測点座標で偏微分し、第二の式を導く。この時、観測点座標は影響関数に関わる部分にしかないという理由から、積分記号下の微分が仮定される。 t を偏微分の作用素として、

$$c(x, y) T(x, y) = \iint \rho(\xi, \eta) t w^* d\xi d\eta - \int (w t V^* - V t w^*) ds + \int (T t M^* - M t T^*) ds + \Sigma (w t F^* - F t w^*) \quad (2)$$

(2) 式の境界積分は自由辺と板の角に観測点があれば、そのままでは発散する事が知られている。しかし影響関数は集中荷重を用いているため、特に着力点が観測点に近づいた時に $t V^*, t M^*$ が発散し、積分記号下の微分が妥当でない。そこで本文は、(2) 式の発散の原因は同仮定にあると考え、そのような場合積分後に微分して同式を評価した。ただし厳密な評価は困難なので、解関数の多項式近似の条件つきで解析的に積分微分したところ、任意の次数で全ての発散項が互いにキャンセルした。これにより、従来数値的に扱っていた、板の角の発散処理を、式中の発散項を単に落とすという簡単な操作で行え、自由辺も特別に工夫せずとも収束する。数値結果は角・自由辺があっても、従来式より良い。

3. 結論

境界方程式を観測点座標で微分し、第二の境界方程式を導く際、積分記号下の微分に留意する。それにより、次の事が可能であるのがわかった。

解を多項式近似し厳密に積分すれば、角・自由辺にまつわる発散項は消去されるので、

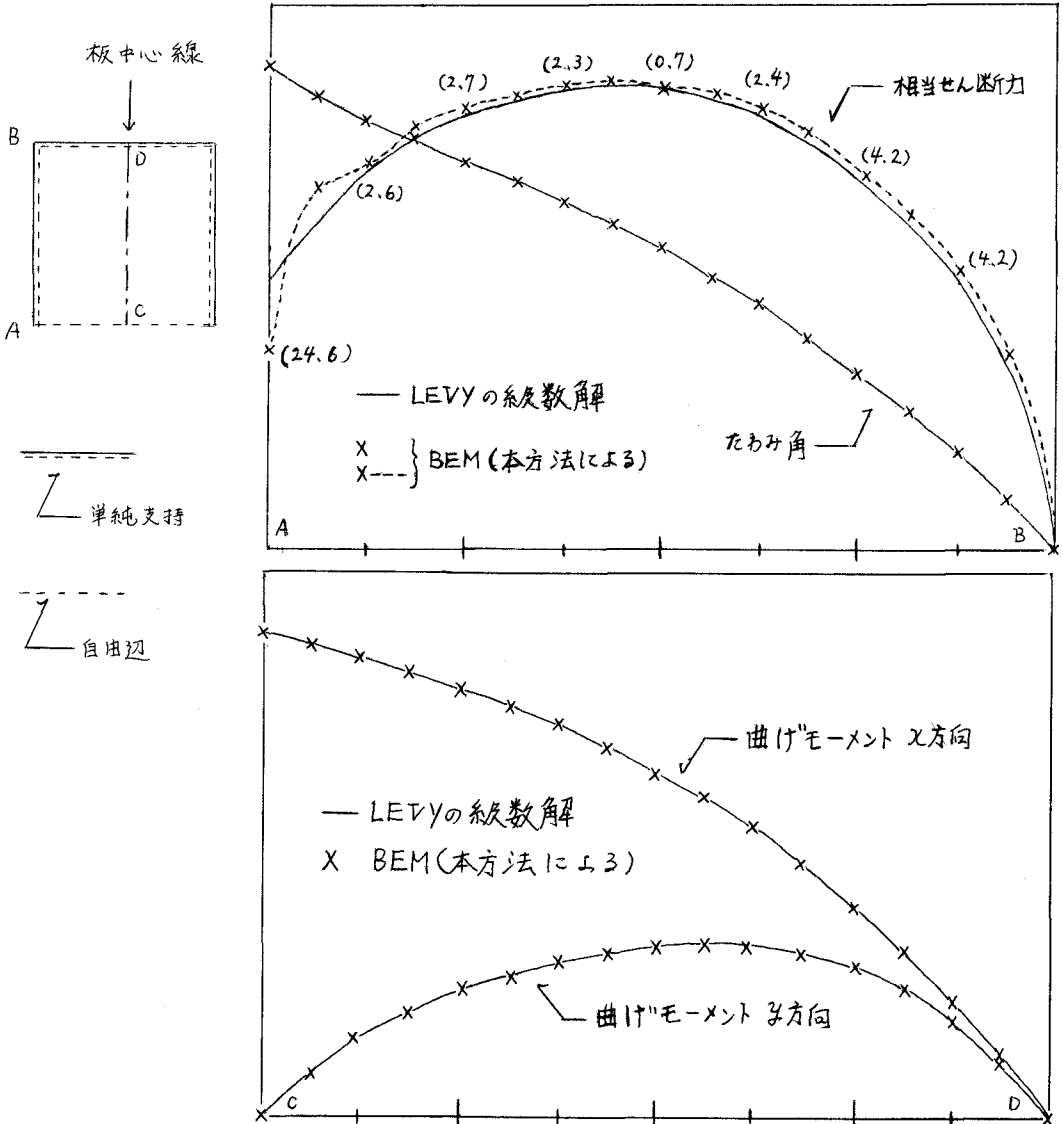
- (1) 発散積分を数値的に処理する必要がない。
- (2) 角観測点を置けるので、二重節点として扱えば、近接節点等を持ち込む必要がない。
- (3) 多項式近似境界積分の n 次要素解析式を導いた。解精度の向上と計算時間の短縮が可能と思われる。
- (4) 自由辺を含む支持条件でも良好な結果を得た。

4. 数値例

以下、計算例を示す。3辺単純支持・1辺自由の正方形板。Levyの級数解との比較。材料定数：辺長 $L=4\text{ m}$ 。板剛度 $D=1500\text{ kgm}$ 。ポアソン比 0.3 。等分布荷重 $\rho=1\text{ kg}$ 均載。内挿関数には、Lagrange多項式を使用した。4次近似・1辺17節点。括弧内の数値は相対誤差(%)。

集中反力 $F/\rho L^2$: ◇単純-単純の角*理論 0.0919 *計算 0.0932 (1.40)

◇自由-単純の角*理論 0.0599 *計算 0.0601 (0.32)



(1) 直接法BEMによる平板の弾性曲げ解析についての一考察：宮崎謙一・田中正隆、第一回境界要素法シンポジウム研究発表論文集、JASCOM (&境界要素法研究会) 1984.11.1 発行

(2) A GENERAL BOUNDARY INTEGRAL FORMULATION

FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF PLATE BENDING PROBLEMS :by MORIS STERN. INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS and STRUCTURES Vol.15 Number10.1979. Pergamon Press.