

I-122

薄板の幾何学的非線形理論を用いた箱桁の差分解析

早稲田大学大学院 学生員 ○小粥 康弘
 早稲田大学大学院 学生員 小林 実央
 群馬工業高等専門学校 正 員 末武 義崇
 早稲田大学理工学部 正 員 平嶋 政治

1. はじめに

近年の土木構造物における設計荷重の増大にともない、耐荷性能の優れた薄肉箱形断面桁の使用範囲はますます広まりつつある。箱形断面桁では、その作用荷重に対して、桁全体のたわみと同時に断面の形状を変化させることによって抵抗するため、構成する薄板の変形特性を含めた解析は必要不可欠である。特に大きな荷重を受ける場合の断面変形は、従来の線形理論の適用範囲を越える可能性が考えられ、薄板集成構造物としての解析と同時に、有限変位理論による非線形問題として解析する必要がある。そこで本報告では、箱桁を構成する4枚の板をそれぞれ独立に解析し、また各板要素については、幾何学的非線形性を考慮した平板理論を適用することで、箱形断面桁の有限変位解析を行った。解析手法には差分法を用い、種々の異なる荷重における解析を通して、薄肉断面桁の変位挙動解析への差分法の適用方法を示した。

2. 解析手法

本報告では、幾何学的非線形性を考慮する平板理論として、von Kármán の平板理論を用いた。本来の理論式は応力関数 F とたわみ w とで表された偏微分方程式であるが、これを変位解析への適用の便を考えて、3方向の変位量 u, v, w の式に書き換える。また、面内方向の力の平衡方程式と、薄板接合部における各条件式を、幾何学的非線形性を含む式として整理する。これらの基礎方程式と、接続条件式及び、桁両端の支持辺における境界条件式を偏導関数の差分近似式を用いて離散化する。今、図1に示す矩形領域を、 x, y 方向にそれぞれ $\Delta x, \Delta y$ の等間隔となるように分割し、領域内部の格点 (i, j) における未知変位量を $U_{i, j}$ とすれば、近似式は例えば以下のように表される。

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{i, j} \approx \frac{U_{i+1, j} - U_{i, j}}{\Delta x} \quad (\text{前進差分}), \quad \approx \frac{U_{i, j} - U_{i-1, j}}{\Delta x} \quad (\text{後退差分})$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{i, j} \approx \frac{U_{i+1, j} - 2U_{i, j} + U_{i-1, j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \Big|_{i, j} \approx \frac{U_{i+1, j+1} - U_{i-1, j+1} - U_{i+1, j-1} + U_{i-1, j-1}}{4\Delta x \Delta y}$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_{i, j} \approx \frac{U_{i+2, j} - 3U_{i+1, j} + 3U_{i, j} - U_{i-1, j}}{(\Delta x)^3}$$

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \Big|_{i, j} \approx \frac{U_{i+2, j} - 4U_{i+1, j} + 6U_{i, j} - 4U_{i-1, j} + U_{i-2, j}}{(\Delta x)^4}$$

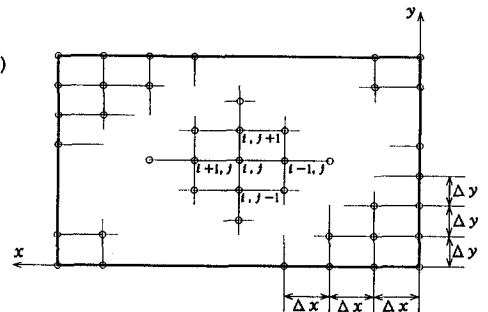
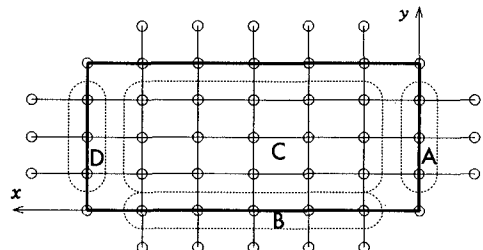


図1 差分分割と格点の関係

また、得られた各式に、対応する板の領域内の格点における変位を代入すれば、全ての格点の変位を未知量とする多元連立代数方程式が得られる。図2に各式の領域と本数を示す。領域外部の格点は、仮想的に設けた格点を示している。接合条件式については、2枚の板につき1組の条件式が成立するため、 $y=0$ の接続辺についてのみ表示した。図2では例として x 方向に6分割、 y 方向に4分割の差分分割としている。



- | | | |
|------|-------------------|----------------------|
| 領域 A | : 支持条件式 ($x=0$) | $3 \times 3 = 9$ 本 |
| 領域 B | : 板と板との接合条件式 | $5 \times 8 = 40$ 本 |
| 領域 C | : 平板の基礎方程式 | $15 \times 3 = 45$ 本 |
| 領域 D | : 支持条件式 ($x=L$) | $3 \times 3 = 9$ 本 |

図2 矩形領域内の式の種類と本数

3. 数値計算法

2節で得られた非線形多元代数方程式を解析する手法を図3のフローチャートに示す。まず、第一次近似解として線形解を求める。次に得られた第一次近似解を、右辺に移項した非線形項に代入し、第二次近似解を求める。以下同様の過程を繰り返すことで、収束計算を行う。

なお、収束判定値 ε は、次式によって定義するものとし、 ε の値が、 1×10^{-3} 以下になるまで反復計算を行った。

$$\varepsilon = \frac{\sum_{k=1}^M (U_k^N - U_k^{N-1})^2}{\sum_{k=1}^M (U_k^N)^2}$$

M : 変位の総数
 U_k^{N-1} : 変位の第 $(N-1)$ 次近似解
 U_k^N : 変位の第 N 次近似解

4. 解析モデル

ここでは、2つの荷重モデルについての計算例を示す。(1)は、上フランジに全面等分布荷重 q_0 が載荷されたモデルであり、平板の基礎方程式における荷重項に q_0 の値を、直接代入した。(2)は、上フランジの端部に軸方向等分布線荷重 P_0 が載荷されたモデルであり、接続条件式の断面力の釣合式に、 P_0 に相当する面内力としての荷重項をつけ加えることで考慮した。支持条件は、各板の支持辺を固定支持とし、差分分割数は桁高、及び桁幅方向を4分割、桁長方向を6分割とした。荷重の大きさ、モデルの寸法、材料定数については、表1に示す通りである。

5. 解析結果及び考察

図4に各モデルの桁全体の変形モードを示す。図から明らかなように上面等分布荷重に対しては、上フランジ及びウェブの変形が卓越するが、上端線荷重に対しては、断面変形と同時に桁のたわみも顕著に現れている。

次に桁の横断面図を図5に示す。上段が支持端近傍($x=L/6$)であり、下段が桁中央部($x=L/2$)での断面である。点線が線形解、実線が非線形解を表し、破線は変形前の形状を示している。箱桁各部における非線形性の影響については、上面等分布荷重の場合、載荷面である上フランジの変形が線形解に比べ多少大きく評価されており、その傾向は桁全体に共通している。これに対し上端線荷重の場合、支持端に近い部分では、載荷辺側のウェブ下部及び下フランジの面外変形が線形解より大きく評価され、桁中央部においては、ウェブ上部及び上フランジにその傾向が顕著に現れている。これは、非線形性の影響する部分が、桁軸方向に変化していくことを意味している。

参考文献

1) Y. C. ファン：個体の力学／理論、培風館、(1970)

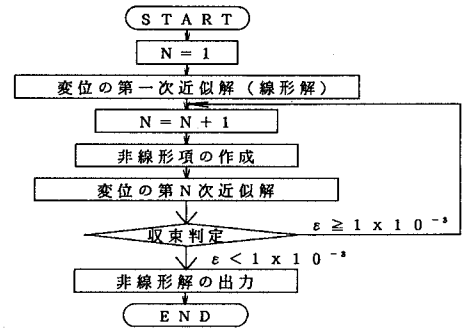


図3 数値計算フローチャート

表1. モデルの緒元

等分布荷重 q_0	0.1 (kg/cm ²)
線荷重 P_0	500 (kg/cm)
桁 長 L	600 (cm)
桁 高 h	100 (cm)
桁 幅 b	100 (cm)
Young 率 E	2.1×10^6 (kg/cm ²)
Poisson 比 ν	0.3

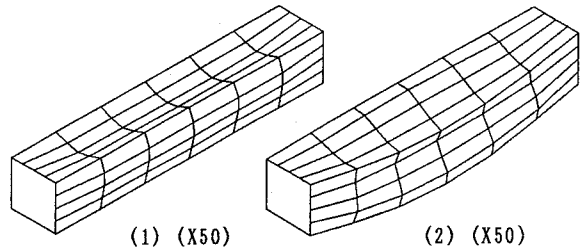


図4 桁全体の変形モード

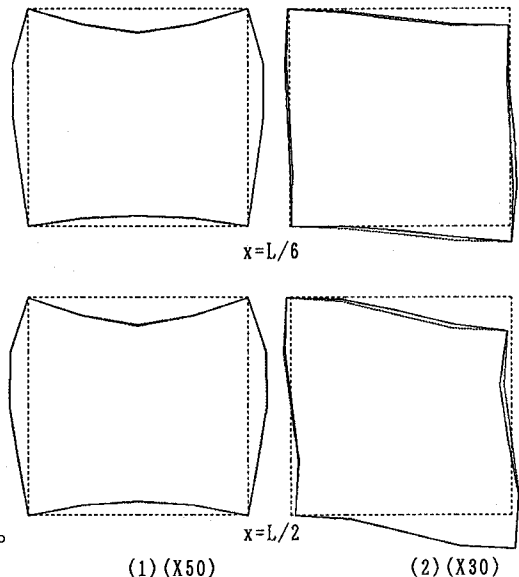


図5 横断面図