

I-120

薄板の接合問題に対するHerrmannの混合型有限要素法の適用

東京工業大学社会開発工学科○ 伊藤 嘉晃
群馬工業高等専門学校 末武 義崇
早稲田大学理工学部 平嶋 政治

1. 緒言

土木構造物の中で多用される箱桁や板桁のような複数の薄板によって構成される構造物は、本来骨組み構造物としてではなく薄板集成構造物と見なして解析するのが妥当であり、最近の大型計算機や数値解析手法の発達に伴い、薄板集成構造物と見なした解析が可能になっている。ところが、解析手法として使用する有限要素法は、それぞれの要素タイプに応じて自由度が限定されているため、各薄板要素の接合に際し必ずしも全ての接合条件が満たされているわけではない。従って考慮されていない接合条件の影響に興味を持たれる。本報告では有限要素法の一例であるHerrmannの混合法を用いて箱桁の解析を実施し、Fourier級数による解析との比較を通じ、接合条件の影響について考察を行なった。

2. 薄板の接合条件

薄板の接合条件式は以下の6条件8本の式がある。

- 1) 曲げモーメントの平衡
- 2) 接合部の直角保持条件
- 3) 膜力と有効剪断力の平衡

- 4) 面内変位とたわみの適合条件式

- 5) 剪断膜力の平衡条件

- 6) 軸方向変位の連続式

$$\begin{aligned} M_{yA} &= M_{yB} \\ \theta_A &= \theta_B \\ N_{yA} &= V_{yB} \\ V_{yA} &= N_{yB} \\ V_A &= W_B \\ W_A &= -V_B \\ N_{xA} &= N_{xB} \\ u_A &= u_B \end{aligned}$$

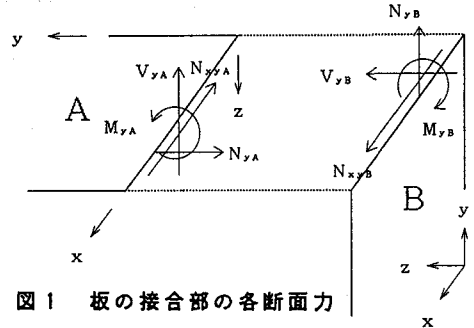


図1 板の接合部の各断面力

3. 解析手法

有限要素法としてHerrmannの混合法を用い、2. に挙げた薄板の接合条件を全て満たすことができる Fourier 級数解析との比較を行なう。

Herrmannの混合法の要素タイプは、3 角形要素の 3 頂点の変位 (u, v, w) と 3 辺の曲げモーメント (M_n) を考慮したものである。つまり、薄板の接合条件として 2. の 1), 4), 6) の 3 条件 4 本の接合条件式のみ満足する。

Fourier 級数解析は次のように行なう。変位を Fourier 級数表示したものを板の基礎方程式に代入し、整理した変位式が (3.1) (3.2) (3.3) である。板 1 枚につき $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i, \delta^i, A^i, B^i, C^i, D^i$ の 8 個の任意定数があり、板 4 枚からなる箱桁を解析モデル (図 3) としているので、全部で $8 \times 4 = 32$ 個の任意定数が存在する。また、一本の接続辺について 2. で示したような 8 本の接続条件式があり、箱桁には 4 本の接続辺があるので全部で $8 \times 4 = 32$ 本の接続条件式が存在する。以上より、32 個の任意定数を決定することができる。

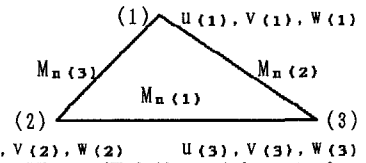


図2 混合法の要素タイプ

$$u_1(x, y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\alpha_n^1 + \beta_n^1 y_1 + \frac{L}{n\pi} \frac{3-\nu}{1+\nu} \delta_n^1) \sinh \frac{n\pi y_1}{L} + (\gamma_n^1 + \delta_n^1 y_1 + \frac{L}{n\pi} \frac{3-\nu}{1+\nu} \beta_n^1) \cosh \frac{n\pi y_1}{L} \right\} \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (3.1)$$

$$v_1(x, y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\alpha_n^1 + \beta_n^1 y_1) \cosh \frac{n\pi y_1}{L} + (\gamma_n^1 + \delta_n^1 y_1) \sinh \frac{n\pi y_1}{L} \right\} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3.2)$$

$$w_1(x, y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (A_n^1 + B_n^1) \cosh \frac{n\pi y_1}{L} + (C_n^1 + D_n^1) \sinh \frac{n\pi y_1}{L} + \delta_{11} \Omega_n \right\} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3.3) \quad (\text{但し } \delta_{11}: \text{kronecker のデルタ})$$

前ページ(3.1)(3.2)(3.3)中の記号は以下のとおりである。

u : x 方向の変位 v : y 方向の変位 w : z 方向の変位 (但し板ごとの部分座標系)
i : 板番号 (i=1, 4) L : 桁長 Ω : 荷重項 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$: 任意定数

4. 解析モデル

解析モデルは桁長のみを変化させ、その他のパラメータは一定とする。

解析モデル共通諸元

項目	寸法/定数
桁幅	20 cm
桁高	20 cm
板厚	1 cm
Young率	2100000 Kg/cm
Poisson比	0.3
要素分割	桁軸方向に10cm, 板幅方向に5cm

桁長は60, 80, 100, 120cm と変化させた。

境界条件：両端の辺(ドット部)において、
変位 $V, W=0$, 曲げモーメント $M_x=0$,
板の中央部 ($X=0$) において $u=0$

荷重条件：板1の $X=0$ に桁軸と直角方向に線荷重

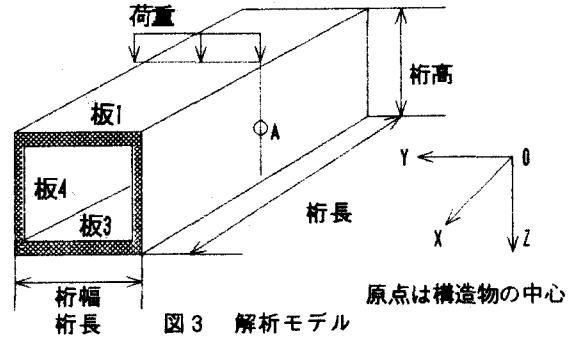


図3 解析モデル

5. 解析結果及び考察

桁全体のたわみを代表すると考えられる点A (図3) の鉛直下向きの変位 V_A と桁長の関係をグラフ化したものが図4である。桁全体のたわみに対し、Fourier級数解は梁理論に基づく解よりも大きく評価し、混合法の解は両者の中間の評価を与えている。また、桁長の増大に伴って3者の差異は減少しているが、混合法の解がより明確に梁理論に近づいている。有限要素分割に際して、メッシュの大きさは一定になるよう配慮したので、この結果は分割の影響によるものではない。

図5は板1と板2の接続辺に沿う M_{y2} , V_{y2} , N_{y2} , N_{xy2} (図3) による内部エネルギーの総和を100とし、各断面力の内部エネルギーがその中でどれだけの割合を占めているかを示したものである。桁長が短いとき ($L=20-60$ cm)、接合部の曲げモーメントによる伝達の影響が他条件に比べ卓越し、板としての接合条件を代表するのに対し、桁長が長くなると ($L=60$ cm以上) 接合部の曲げモーメントの影響よりも、混合法で考慮し得ない膜力・有効剪断力、剪断膜力の伝達の影響が板としての接合条件に大きな比重を占める。このため、図4に見られるように桁長の増大に伴い、接続辺上の断面力として曲げモーメントしか考慮できない混合法の解が、全ての断面力を考慮できる Fourier級数解から離れていくと考えられる。

混合法で考慮されない接合部の直角保持条件は桁軸と直角方向に存在するので、図6に示されるような断面変形モード図に影響が現れる。混合法の解は Fourier級数解に比べ、上フランジのたわみを大きく、下フランジとウェブのたわみを小さく評価する傾向にある。この原因は、前述のように混合法が接合部の直角保持条件を満足しないため、板1の変形の影響が他の板に伝達されにくく荷重の大部分を板1がたわむことにより負担していると考えられる。

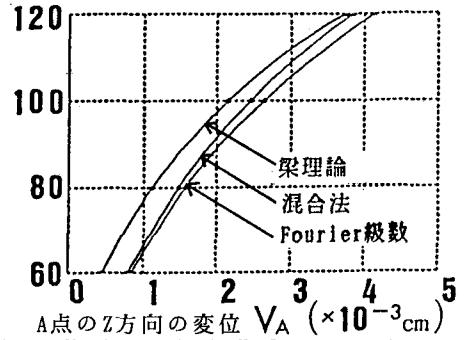


図4 桁長-変位図 (荷重=50 Kg/cm)

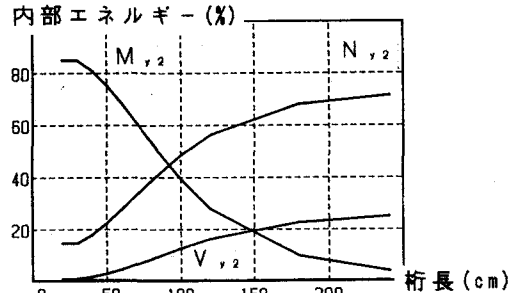


図5 内部エネルギーの分担率-桁長図

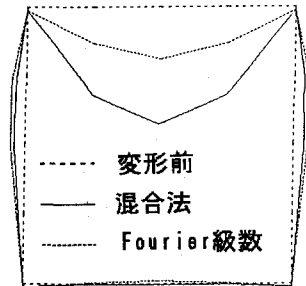


図6 X軸に垂直な $X=0$ での断面変形図
(桁長=60cm, 荷重=21.487 Kg/cm)
(変位のみ700倍)