I-59

波動問題における時間領域境界要素法の安定性

日本総合研究所　正員　磯　浩司
福井大学工学部　正員　福井卓雄

1. はじめに

波動問題における時間領域境界要素法の安定性の一評価方法を提案し，代表的な境界条件のもとでの数値解の安定性について検討する．一般に，時間領域境界要素法における数値解析は，マトリクスで記述された時系列に関する差分型方程式を解くことに帰着される．この系の解が安定であるためには，ランダム入力を与えたときの解が自己回帰過程であることが必要である．ここでは，離散系のベクトル差分型方程式を，境界上の固有モードをもちいて，等価なスカラー差分型方程式の組に分解し，各モードに対する特性方程式の根を調べることによって系の安定性を評価する．

2. 波動問題の時間領域境界要素法[1]

SH波の散乱問題における時間領域境界要素法の積分方程式は，Neumann 型境界条件のもとで

$$\frac{1}{2}u(\boldsymbol{x},t) - \int_0^t\int_{\partial B}\frac{\tau\mathrm{H}(\tau-r/c)}{2\pi r\sqrt{\tau^2-r^2/c^2}}\frac{\partial r}{\partial n_y}\dot{u}(\boldsymbol{y},t-\tau)\,d\tau ds_y = \tilde{u}(\boldsymbol{x},t) \tag{1}$$

と表わすことができる．ここに，∂B は外部領域 B の境界，$\partial/\partial n_y$ は境界上の点 $\boldsymbol{y}$ における外向き法線微分，u は境界変位，c は波の速度，$r\equiv|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$，$\mathrm{H}(t)$ は Heaviside の単位階段関数，$\tilde{u}$ は入射波の変位である．時間方向および境界上において適当な近似を導入すると，(1) は離散化されて，

$$\mathbf{u}^N + \mathbf{B}^1\mathbf{u}^{N-1} + \mathbf{B}^2\mathbf{u}^{N-2} + \cdots + \mathbf{B}^M\mathbf{u}^{N-M} = \tilde{\mathbf{u}}^N, \qquad N>M \tag{2}$$

となる．ここに，$\mathbf{B}^K$ は係数マトリクス，$\mathbf{u}^K$ は第 K ステップの離散化変位ベクトル，$\tilde{\mathbf{u}}^N$ は第 N ステップの入射波ベクトルである．ただし，(2) においては，K が大きいときの係数マトリクスは省略できるとして，有限項 (M) の方程式とした．

3. 時間領域境界要素法の安定性の評価方法[2]

ベクトル差分型方程式 (2) を，境界関数の固有モードで分解し，スカラー差分型方程式の組として表現し直す．固有モードは，境界の離散化の影響を反映するように，対応する周波数領域境界要素法の固有ベクトルとして求めた．第 n 次固有モードの固有ベクトルを $\mathbf{X}_n$ とすると，離散化変位ベクトル $\mathbf{u}$ は

$$\mathbf{u} = \sum_n \mathbf{X}_n q_n \tag{3}$$

と表わされる．また，(2) の係数マトリクス $\mathbf{B}^K$ について

$$\mathbf{X}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^K\mathbf{X}_j = \begin{cases} 0 & i\neq j \\ b_i^K & i=j \end{cases} \tag{4}$$

が成立する．したがって，(2) に左側から $\mathbf{X}_n$ の転置をかけると

$$q_n^N + b_n^1 q_n^{N-1} + b_n^2 q_n^{N-2} + \cdots + b_n^M q_n^{N-M} = \tilde{q}_n^N \tag{5}$$

が得られる．(5) は第 n 次のモードについての境界要素法の離散化式である．

(5) の系について，その特性方程式

$$z^M + b_n^1 z^{M-1} + b_n^2 z^{M-2} + \cdots + b_n^{M-1} z + b_n^M = 0 \tag{6}$$

の根のなかで，絶対値が 1 より大きいもの，または，絶対値が 1 であるが重根のものがあれば，系は不安定である．[3] すなわち，時間領域境界要素法の解の安定性の評価は，解析対象とする系の各固有モードについて得られる個々のスカラー差分型方程式について，その特性根を評価することに帰着される．

4. 安定性の検討

さきに提案した方法にしたがって，Neumann 型および Dirichlet 型境界値問題の安定性を検討した．図1に Neumann 型境界値問題の結果を，図2に Dirichlet 型境界値問題の結果を示す．図は，各モードにおける特性根の絶対値の最大値を時間増分幅に対してプロットしてある．図1より，Neumann 型境界値問題の場合は，時間増分幅が小さくなるほど特性根は1に近づくが，1を越えることはなく，離散系は安定であると判断される．また，図2より，Dirichlet 型境界値問題の場合は，0次モードの特性根はどの時間増分幅に対しても1を越えており，離散系は不安定となる可能性がある． 図1によれば，Neumann 型境界値問題の系は安定ではあるが，時間増分幅が小さいときには特性根はきわめて1に近い．したがって，系に何らかの誤差が含まれれば特性根が1を越えることも考えられる．実際に，(2) の係数マトリクスの計算過程において，故意に数値積分誤差を発生させて特性根を計算したところ，数値積分誤差が増大すると共に特性根は1を越え，系は不安定となることが確認された．

5. おわりに

波動問題における時間領域境界要素法の安定性を数値的に検討した．その結果，次の結論を得た．

(1) Neumann 型外部境界値問題の離散系は安定である．
(2) Dirichlet 型外部境界値問題の離散系は不安定である．
(3) Neumann 問題においても，時間増分幅が小さくなるほど安定を保持するための条件は厳しくなり，誤差を含む離散系では不安定になる可能性がある．

最後に，ここで提案した安定性の評価方法は熱伝導問題などの他の時間依存性の問題にも適用できる一般性を持っていることを記しておく．

参考文献

(1) Fukui, T. and K. Tani (1989), Error and stability of numerical solution of time marching boundary element method in wave problem, *Advances in Boundary Elements*, Eds. C.A. Brebbia and J.J. Conner, 221-230, Springer.
(2) 福井卓雄，磯浩司 (1990)，波動問題における時間領域境界要素法の安定性に関する一考察，境界要素法論文集，**7**, 41-46.
(3) Koopmans, L.H. (1974), *The Spectral Analysis of Time Series*, Academic Pr.

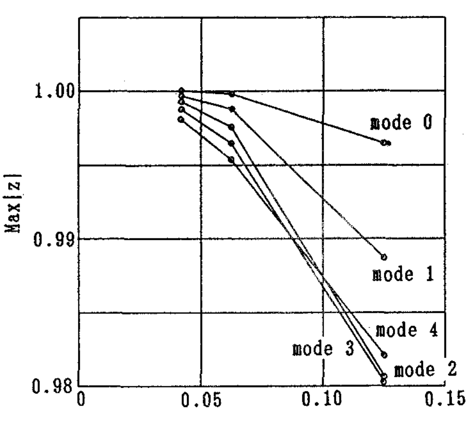

図1 特性根の最大絶対値 (Neumann 問題)

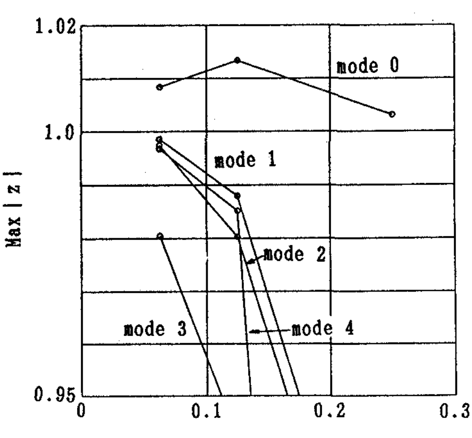

図2 特性根の最大絶対値 (Dirichlet 問題)