Ｉ-58 二次元波動問題の時間領域境界要素法における係数行列の切捨ての規準について

福井大学工学部　　福井卓雄
日本総合研究所　　磯　浩司

1. 序論

二次元波動問題の時間領域境界要素法における係数行列の切捨ての影響について，種々の視点から検討し，切捨ての規準について考察する．ここで論ずる事柄は，スカラー波動問題だけでなく，弾性波動問題にも適用できる事柄である．

波動問題の時間領域境界要素法においては，離散化された方程式の一般形は，第 N ステップにおいて

$$\mathbf{B}^0\mathbf{u}^N + \mathbf{B}^1\mathbf{u}^{N-1} + \mathbf{B}^2\mathbf{u}^{N-2} + \cdots + \mathbf{B}^{N-1}\mathbf{u}^1 = \tilde{\mathbf{u}}^N \tag{1}$$

のようになる.[1] ここに，$\mathbf{u}^K$ は第 K ステップの解，$\tilde{\mathbf{u}}^N$ は第 N ステップの入射波である．係数マトリクス $\mathbf{B}^K$ については，三次元の場合には，境界の大きさと離散化のための時間増分とに関係したある数 M_0 について，$\mathbf{B}^K=0$ $(K>M_0)$ となる．すなわち，三次元問題においては，(1) は有限項の差分型方程式となる．一方，二次元問題の場合には，同様にして決まる M_0 について，$K>M_0$ で係数マトリクス $\mathbf{B}^K$ の大きさは漸減しはするものの，ゼロにはならない．つまり，二次元問題の場合には，(1) は本質的には無限項の差分型方程式である．

上のことにより，ステップ数の多い，長時間にわたる二次元解析に (1) を利用する場合には，計算機の記憶容量と計算時間を節約するために，何らかの工夫が必要となる．一つの方法は，係数マトリクス $\mathbf{B}^K$ $(K\geq1)$ の計算をまったくやめてしまって，本来の繰り込み積分をすべて数値積分によって処理してしまう方法である.[2] この方法によると，記憶容量は必要がなくなるが，計算時間の方はむしろ増加してしまう．記憶容量の小さな計算機で長時間の計算が可能な場合には有利だが，一般的ではない．第二のもっと一般的な方法は，係数マトリクスの列を途中から切り捨ててしまう方法である.[3,4,5] 具体的な処理方法についてはいろいろと提案されているが，結論的には，ある数 $M>M_0$ を定めて，$\mathbf{B}^K=0$ $(K>M)$ とすることになる．すなわち，三次元問題との相似性を持ち込んだ形になっている．

ここでは，第二の方法において，切捨ての規準となる数 M をどの様に決定すべきかについて，切捨て操作が (1) にどのような影響を及ぼすかという観点から検討する．

2. 係数行列の漸減性

円の内部 Neumann 問題について例を挙げる．図１は，係数マトリクス $\mathbf{B}^K$ のノルム（要素のうちで絶対値最大のもの）を時間ステップに対してプロットしたものである．時間ステップは，波が円を通過する時間 T_0 を単位として表示してある．ステップ数 K が大きくなったときの $\mathbf{B}^K$ の漸減のようすは明かである．K が十分に大きいときの係数マトリクスの大きさは $1/K^3$ に比例する．これは係数マトリクス $\mathbf{B}^K$ からも直接計算することができる．

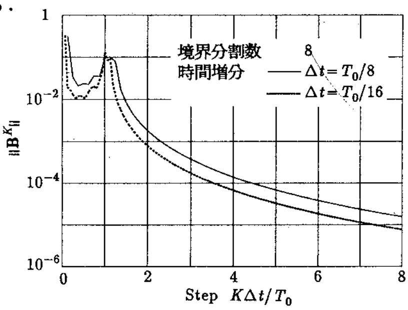

図１係数マトリクスの大きさ

3. 周波数領域境界要素法との比較

(1) を Fourier 変換すると対応する周波数領域の境界要素法の離散化式と等価なものが得られる.[6,7] 図２は，(1) に切捨て操作をしたものを Fourier 変換して得られる周波数領域マトリクスの行列式と，周波数領域境界要素法の係数マトリクスの行列式との差の絶対値の最大値を，切捨てステップについてプロットしたものである．$3T_0$ 以降の切捨てについては，これらの差にほとんど変化が無いことが分かる．

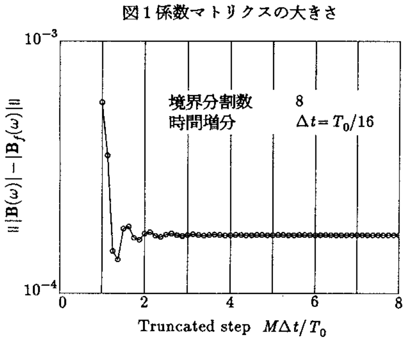

図２周波数領域境界要素法との比較

4. 特性根の比較

(1) の特性方程式について見てみる.[7] (1) を境界の固有関数でモード毎の方程式に分解し，切捨てによる特性根のずれの影響を表示したのが図3である．図では，0次モードの特性根のうち大きい方から3つの根について，$8T_0$ で切り捨てた場合の特性根との差の絶対値を表示している．いちばん大きな根の収束が遅い他は，$3T_0$ 以降の切捨てについてほぼ同等の値を示している．収束の遅い根は，系の不安定のために絶対値が1を越えている根である．

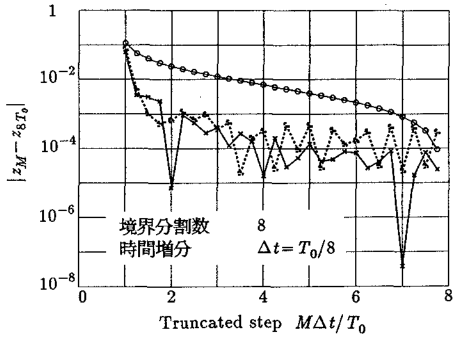

図3 特性根の比較

5. 解析例における比較

簡単な問題について (1) を解析したときの誤差のようすを図4に示す．解析は $8T_0$ までとし，$T_0, 2T_0, 4T_0$ で係数マトリクスを切り捨てたときの誤差を時間の経過に対して表示してある．図より，解析に用いる係数マトリクスが $2T_0$ までであってもこの時間域では誤差は 10^{-2} 程度である．これは，相対誤差にして 1/10 以下である．係数マトリクスとして $4T_0$ までを用いれば，誤差は 10^{-3} 程度であり，実用的にはほとんど問題はないと考えられる．

しかし，誤差の程度は時間の経過と共に大きくなっている点に注意が必要である．他の解析例によれば，誤差の程度は時間に対して t^{α} $(\alpha>0)$ に比例し，時間の増加関数である．したがって，ごく長時間の解析を行なう場合には，解析時間に相応した項数だけ係数マトリクスの計算が必要であると考えられる．

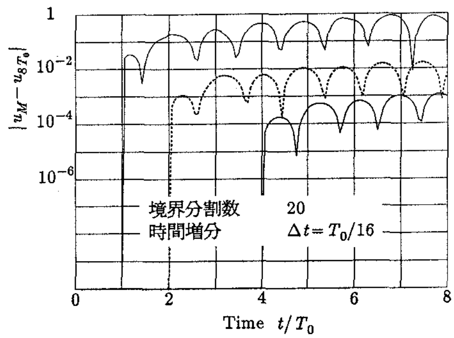

図4 数値解の誤差

6. 結論

二次元波動問題の時間領域境界要素法 (1) において，係数マトリクスの切捨ての影響を，(1) の系からのずれの大きさという視点から見てきた．(1) の系の特性の保持という視点からすれば，波が境界を通過する最大時間 T_0 に対して，$3T_0 \sim 4T_0$ 程度の期間の係数マトリクスを利用すれば，精度的には十分であるという結論を得る．しかしながら，(1) の項数の切捨てによって生じる誤差は時間の増加関数であって，長時間にわたる解析の場合には，誤差を適当な大きさ以下に抑えるために，解析時間に相応した項数だけ係数マトリクスの計算が必要であるという点に注意すべきである．

Dirichlet 問題の場合には，係数マトリクス $\mathbf{B}^K$ の漸減の程度は $1/K$ である．Neumann 問題の場合よりも，さらに厳しい条件が必要となろう．

参考文献

(1) 福井卓雄 (1988), 二次元動弾性問題の時間積分境界要素法による解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, **12**, 197-202.

(2) Fukui, T. (1986), Time marching analysis of boundary integral equations in two dimensional elastodynamics, *Innovative Numerical Methods in Engineering*, Eds. R.P. Shaw et al., 405-410, Springer.

(3) Demirel, V. and S. Wang (1987), An efficient boundary element method for two-dimensional transient wave propagation problems, *Appl. Math. Modelling*, **11**, 411-416.

(4) 吉田裕，阿部和久 (1989), 時間領域境界要素法による弾性波動解析に関する一考察，構造工学論文集, **35A**, 231-239.

(5) Silva, W.L. and W.J. Mansur (1990), A truncation scheme for BEM analysis of two-dimensional transient wave propagation problems, *Boundary Elements XII*, Eds. M. Tanaka, C.A. Brebbia and T. Honma, Vol.1, 535-553, Springer.

(6) Fukui, T. and K. Tani (1989), Error and stability of numerical solution of time marching boundary element method in wave problem, *Advances in Boundary Elements*, Eds. C.A. Brebbia and J.J. Conner, Vol.2, 221-230, Springer.

(7) 福井卓雄，磯浩司 (1990), 波動問題における時間領域境界要素法の安定性に関する一考察, 境界要素法論文集, **7**, 41-46.