I-55　ブロック対角化法による平板の曲げ解析

三菱重工業　正会員○有尾一郎
長岡技術科学大学　正会員　池田清宏
長岡技術科学大学　正会員　鳥居邦夫

1．はじめに

対称性を有する離散化された系において、対称性は各種の物理現象と深い関わりがあり、多くの分野で利用されている。現在、構造解析の分野での対称性の利用法は、つぎの２つに大別される。(１)軸対称回転体を扱う問題に対し、円筒座標系に座標変換を行なって、ある直交関数を用いることにより、支配方程式を分離する方法と、(２)デカルト座標系で離散化された系に対し、折り返し対称性を利用し、解析領域の一部を解析する簡便法がそれである。しかしながら、対称性の利用は個々の構造例に対し、半ば経験的に行なわれている。

これに対し、量子力学の分野では、対称性を幾つかに分類し、対称な系のつりあい方程式をある適当な写像変換により、幾つかの独立な方程式に分離できるという原理が利用されている。近年、文献[1)]では、この原理に基づいて、軸対称トラス構造物に応用されている。

本研究では、昨年の面内の平板モデルを拡張して、面外の問題にも適用できるように改良したものである。これにより、対称性の利用を益々高めた。

2．板曲げのブロック対角化法

幾何学的図形（節点の集り）e対し、図形eを全体として不変性を保つ合同変換、すなわち、

$$\{g(e)=e \mid g\in G\} \qquad (1)$$

元gは線対称や点対称などの対称変換をもつ。要素eのすべての対称変換の集合は群Gをつくる。正方形の対称変換群の記号，D_4で表わす。いま、Iを恒等変換，rを原点まわりの90°の回転変換、sを線対称変換の記号とすると，D_4は群をつくるから、

$$D_4=\{I,r,r^2,r^3,s,r\circ s,r^2\circ s,r^3\circ s\},\ r^4=s^2=I,\{r,s\in\mu\} \qquad (2)$$

が成り立つ。また、長方形の群はD_4-対称の一部であり、ρを点対称変換の記号としたとき、

$$D_2=\{I,\rho,s,\rho\circ s\},\ \rho^2=s^2=I,\ \{\rho,s\in\mu\} \qquad (3)$$

となる。これらの元gはつぎの、

正方形

h(1)：４軸対称(x, y, s-s, t-t軸)
h(2)：２軸対称(x, y軸)
h(3)：90度の回転対称
h(4)：２軸対称(s-s, t-t軸)
h(5)：x軸対称
h(6)：y軸対称

長方形

h(1)⊕**h**(2)：２軸対称(x, y軸)
h(3)⊕**h**(4)：点対称
h(5)　：x軸対称
h(6)　：y軸対称

座標変換行列**h**(μ)をもつ(図－１参照)。

剪断変形を無視した非適合要素のＡＣＭ要素(12自由度)を、座標変換行列$\mathbf{h}_i$を用いてブロック対角化する。このとき、平板の断面特性、材料特性等は均一とする。基準座標ξ，ηの関数として変位関数w(ξ，η)を、

$$w(\xi,\eta)=a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi^2+a_5\xi\eta+a_6\eta^2+a_7\xi^3+a_8\xi^2\eta+a_9\xi\eta^2+a_{10}\eta^3+a_{11}\xi^3\eta+a_{12}\xi\eta^3 \qquad (4)$$

の多項式とする。また、座標系を便宜上，θyは右手系，θxは左手系を正となる回転方向としたときの節点変位ベクトル$\mathbf{u}_i$(∈**u**)は、

$$\mathbf{u}_i=\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta x_i \\ \theta y_i \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} w_i \\ -(\partial w/\partial y)_i \\ -(\partial w/\partial x)_i \end{Bmatrix} \tag{5}$$

とする。さらに、ブロック対角化を行なうために、対称性を張る座標系に座標変換すると、

$$\hat{\mathbf{u}}(\mu)=[\mathbf{h}(\mu)]^t\mathbf{u} \tag{6}$$

となる。ある要素ｅのi，j節点間の剛性行列を、

$$\{\ \mathbf{K}^e_{ij}\in\ \mathbf{K}^e\ \in\ \mathbf{K}\ |\ i,j\ \in\ m\ \} \tag{7}$$

$\mathbf{K}^e_{ij}$とする。ここで、ｍは要素内の節点の集合を表わす。節点i，jに対応する対称要素をκ_i，λ_iとする。 これらの対称要素は、前述の対称変換群μを持つから、$\mathbf{K}^e_{ij}$に対称変換を施すと、

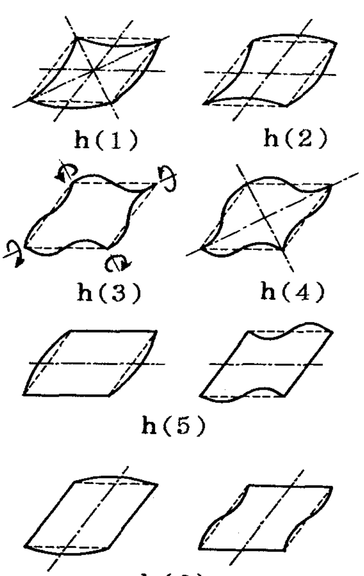
$$\hat{K}^e_{\kappa i,\lambda j}(\mu)=[\mathbf{h}_{\kappa i}(\mu)]^t\mathbf{K}^e_{ij}\mathbf{h}_{\lambda j}(\mu) \tag{8}$$

$$\hat{K}(\mu)=\sum_e\sum_i\sum_j\hat{K}^e_{\kappa i,\lambda j}(\mu) \tag{9}$$

となり、群μのブロック行列$\hat{K}(\mu)$が求まる。これらのブロックは直交しているので、釣り合い方程式は、

$$[\mathbf{h}(\mu)]^t\mathbf{f}=\hat{K}(\mu)\cdot\hat{\mathbf{u}}(\mu) \tag{10}$$

と分離される。ここで、左辺から座標変換される荷重項のブロックのみを考えればよいこととなる。



図－１　たわみ角の対称変形パターン

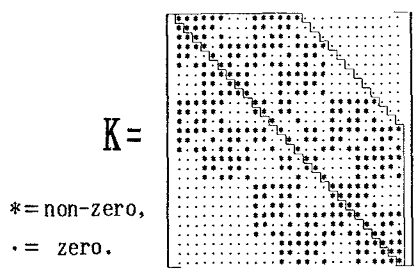
3．計算例

非常に簡単な例として、２×２要素からなる平板モデルを考えたときの剛性行列のイメージは、図－２(ａ)となる。これをブロック対角化した結果が図－２(ｂ)，(ｃ)である。(ｂ)は長方形板を、(ｃ)は正方形板を対角化したときのものである。この手法で得られた解は、従来の解と一致した。

参考文献

1) K. Ikeda and K. Murota, 'Bifurcation analysis of Axi-symmetric Structure using Block-Diagonalization', 1990

2) 有尾一郎，池田清宏，鳥居邦夫：土木学会第45回年次学術講演会講演概要集，pp. 192-193, 1990



図－２(ａ) 対称帯剛性行列

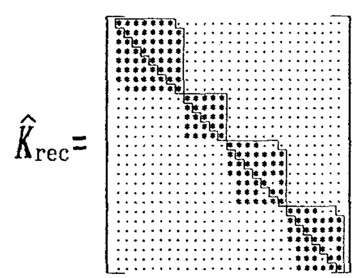


図-２(ｂ) 長方形板のブロック対角化

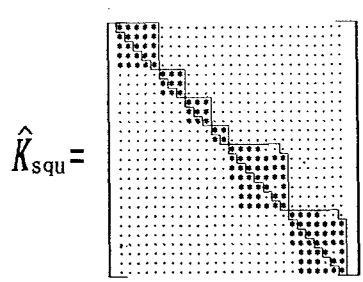


図-２(ｃ) 正方形板のブロック対角化