

## I-54

一次元配列の前処理つき共役勾配法  
のパソコンへの適用について

北海道大学工学部 正員 佐藤 浩一

北海道大学工学部 正員 小幡 卓司

1. まえがき

構造解析、特に有限要素法（FEM）においては行列が大規模になり、大型コンピュータを利用しなければならず、パソコンでは無理と言われている。しかしながら、パソコンを用いる場合でも、構造解析において多少工夫すればかなり大規模の行列演算が出来る。例えば、FEMにおける係数マトリックスは剛性マトリックスに他ならず、剛性マトリックスには、一般に次のような性質がある。

性質1）大規模である。性質2）疎行列である。性質3）帯行列である。性質4）対称行列である。これらの性質を上手に利用すれば、メモリーをかなり節約出来る。

本報告はパソコンを用いて MS-FORTRAN でメモリーを節約して多元連立一次方程式を解くプログラムを組むための一つの手法を報告するのが目的である。具体的には、メモリーを有効に利用するため、係数マトリックスを一次元配列し、不完全コレスキー分解後、共役勾配法を併用して、何元ぐらいまでの多元連立一次方程式（但し、疎行列とする）の解析が可能かを検討するのが目的である。

2. 修正コレスキー分解と不完全コレスキー分解について

構造解析、特に有限要素法（FEM）における、剛性マトリックス解析は多元連立一次方程式を解くことに帰着される。多元連立一次方程式には大別して直接法と反復法があり、それぞれ目的に応じて用いられている。FEMでは一般には図-1のような配列になる。いま、図-1におけるような正方マトリックス  $K$  を、左下三角マトリックス  $L$  と  $L^T$ （ $L$ の転置行列）と対角マトリックス  $D$  を導入して

$$K = L \cdot D \cdot L^T \quad \dots\dots\dots (1)$$

ように修正コレスキー分解する。スカイライン法とは剛性マトリックスの列ごとにバンド幅を可変で設定したもので、図-1のような剛性マトリックスの非零成分の輪郭が都市のビル群のシルエットに似ていることからこの命名がある。このような剛性マトリックス（係数マトリックス）の輪郭内の成分だけを用いて前述の修正コレスキー分解し、図-1のように各列の最初の非零成分と対角成分の間の領域のみを記憶し、図-2のようにこれを一次元配列して解析する直接法である。この場合、輪郭内の零成分も一次元配列に入る。一方、不完全コレスキー分解とは修正コレスキー分解を行う際に、輪郭の中で  $k_{ij} = 0$  ならば、 $l_{ij} = 0$  とするのが、不完全コレスキー分解の”不完全”という意味である。つまりメモリーと計算時間の節約のために、もとのマトリックス成分が零だったところは、分解後も零とみなし、記憶しないで、計算に用いない。

3. 前処理つき共役勾配法について

前処理つき共役勾配法とは不完全コレスキー分解と共役勾配法とを組合わせて、多元連立一次方程式を解く方法である。この解法は直接法と反復法の長所を兼ね備えたもので、近年、特に注目を集めている解法である。一般的な傾向として、直接法の方が反復法よりも有限要素法向きだと考えられてきた。しかし共役勾配法の前処理として不完全修正コレスキー分解を用いる反復法の出現によって、こうした考えは見直されつつある。前処理つき共役勾配法はそうした中でも特に有望な解法といえよう。ここでいう不完全修正コレスキー分解とは、三角分解の過程で生ずる零成分を無視して計算を進めることで、パソコンのように記憶容量がネックの場合には、メモリの節約は有効である。しかしながら、修正コレスキー分解が不完全ならば、それだけ精度が悪くなる。従ってこれを共役勾配法によって補うというのが前処理つき共役勾配法であるという解釈も成り立つ。共役勾配法は一般の反復法と異なり、理論上は有限回の反復によ

て厳密解に到達するといった特長がある。前処理つき共役勾配法における剛性マトリックス  $K$  の場合もスパース性を利用して、非零成分だけで構成される一次元配列とする（図-1の輪郭外の零成分はもちろん輪郭内にある零成分も一次元配列には入れない）ため、それだけ煩雑なプログラムになることは否めないものの、従来のバンドマトリックス法などに比べて、メモリの大幅な削減が可能となり、その結果、大規模の多元連立一次方程式を扱うことができる。

#### 4. 前処理つき共役勾配法による数値計算例

図-3に示すような、前述の性質を有する多元連立一次方程式に関して何元ぐらいまでパソコンで解析することが出来るか検討した。MS-FORTRAN で PC-9801 VM2 と PC-9801 RA2 を用いて単精度で計算した。演算プロセッサは使用していない。スクリーンエディターとして FINAL と MIFES を用いた。計算結果として、前処理つき共役勾配法で解いた場合  $N = 3156$  元まで計算することが出来た。この数値計算例の場合、単精度で十分である。計算時間は VM2 で約1分30秒、RA2 で約1分であった。

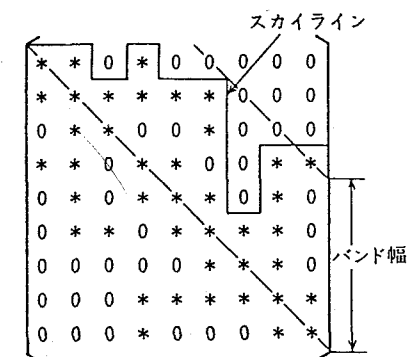


図-1 スカイライン

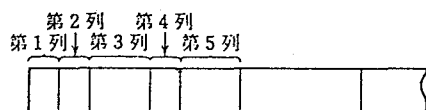


図-2 構造全体の剛性マトリックス

次のような多元連立一次対称方程式を解く。

|    |             |             |        |
|----|-------------|-------------|--------|
| 10 | 4 3 2 1     |             | V(1)   |
| 12 | 3 4 3 2     |             | V(2)   |
| 22 | 2 3 8 6 2 1 |             | V(3)   |
| 22 | 1 2 6 8 3 2 | 他は全部 0      | V(4)   |
| 22 | 2 3 8 6 2 1 |             | V(5)   |
| 22 | 1 2 6 8 3 2 |             | V(6)   |
| 22 | 2 3 8 6 2 1 |             | V(7)   |
| 22 | 1 2 6 8 3 2 |             | V(8)   |
| 22 | 2 3 8 6 2 1 |             | V(9)   |
| 22 | 1 2 6 8 3 2 |             | V(10)  |
| 22 | .....       |             | .      |
| 22 | .....       |             | .      |
| 22 |             | 2 3 8 6 2 1 | .      |
| 22 |             | 1 2 6 8 3 2 | .      |
| 22 |             | 2 3 8 6 2 1 | .      |
| 22 |             | 1 2 6 8 3 2 | .      |
| 22 | 他は全部 0      | 2 3 8 6 2 1 | .      |
| 22 |             | 1 2 6 8 3 2 | V(n-2) |
| 12 |             | 2 3 4 3     | V(n-1) |
| 10 |             | 1 2 3 4     | V(n)   |

MS-FORTRAN を用いて前処理つき共役勾配法で解く場合  
 入力データ ( N は連立一次方程式の元数、 N1 は印字の間隔 )  
 N = 3156, N1 = 100  
 をファイル名 = DATA12 から読み込む。

圖-3 多元連立一次方程式

## 5. あとがき

本報告の数値計算例で示したように、約 1 分程度で 3156 元のかかなり大規模の多元連立一次方程式（但し、疎行列とする）を前処理つき共役勾配法を用いてパソコンで解くことが出来た。本報告のパソコンを用いたは前処理つき共役勾配法は FORTRAN 77 に準拠しているので、メモリーがオーバーするような場合は、大型コンピュータに簡単に移せるので、さらに大規模の多元連立一次方程式（但し、疎行列とする）を解くことが可能である。

(参考文献)

- 1) 佐藤浩一、渡辺昇、小幡卓司、井上稔康：一次元配列のICCG法とスカイライン法のパソコンへの適用について、土木学会北海道支部論文報告集、第46号、pp.13-18、1990.2.
- 2) 佐藤浩一、小幡卓司：超多元連立一次方程式のパソコンによる計算法について、土木学会第45回年次学術講演会講演概要集、I-76、pp.182-183、1990.9.