I-51　有限要素法における適正メッシュの検討法

○熊本大学　正　員　平井一男
八代高専　　　　　　内山義博

1。はじめに

二次元平面応力問題における支配方程式は、二方向の力の釣合並びに適合条件の三条件式より構成されている。離散化して取り扱う有限要素法がこの連続体としての微分方程式に合致するには、無限に要素分割を行う必要があるが、計算機容量、時間の関係から無限に分割することは不可能である。

本報告では、有限要素法で応力の座標による微分値を求め、これに前記三条件式を適用することにより、要素分割の適否の検討、計算精度のチェツクを行う。

2。理論

2.1 二次元平面応力問題の三条件式

物体力が無いとすると、釣合方程式は

$$\sigma_x,x + \tau_{xy},y = 0 \quad (1) \qquad \tau_{xy},x + \sigma_y,y = 0 \quad (2)$$

であり、また応力に関する適合条件式は下記のごとく表せる。

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (3)$$　但し　$\nabla^2 = \_,xx + \_,yy$　である。

従って、応力に関しての２階微分までが必要となる。

ここで、$\_,x$、$\_,xx$ はそれぞれxでの偏微分 $\partial\_/\partial x$、$\partial^2\_/\partial x^2$ を表すものとする。

2.2 座標による応力の微分値

三角形内歪一定の仮定の基でのx、y方向の変位u、vは(4)式のごとく未定係数α_{ij}を含んだ一次式で、また応力ベクトルσと変位ベクトルUの関係は(5)式で表せる。

$$u = \alpha_{10} + \alpha_{11}x + \alpha_{12}y \qquad v = \alpha_{20} + \alpha_{21}x + \alpha_{22}y \quad (4)$$

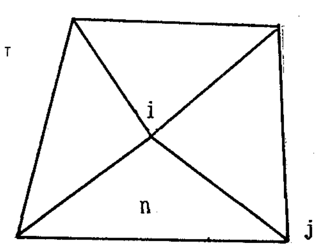
$$\sigma = DBU \quad (5)$$

$$D = \frac{1}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad B = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\overline{B}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = x_j y_k + x_k y_i + x_i y_j - x_j y_i - x_i y_k - x_k y_j$$

但し、$\sigma = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T$　$U = [u_i \ v_i \ u_j \ v_j \ u_k \ v_k]^T$

E：ヤング率　ν：ポアソン比である。



図－１　三角形メッシュ

さて、(5)式をxで微分すると

$$\sigma,x = DB,xU + DBU,x \quad (6)$$

であり、更に微分すると次式となる。

$$\sigma,xx = DB,xxU + 2DB,xU,x + DBU,xx \quad (7)$$

まず歪マトリックスBは、x座標で直接微分することにより

$$B,x = -\Delta,x\overline{B}/\Delta^2 + \overline{B},x/\Delta = (\overline{B},x - \Delta,xB)/\Delta \quad (8)$$

さらに、２階微分は $\overline{B},xx = \Delta,xx = 0$ を考慮し、(8)式を微分すると次のごとく簡単になる。

$$B,xx = -2\Delta,x\overline{B},x/\Delta \quad (9)$$

また変位の微分は、変位関数を直接微分するか、力－変位関係式より求めるかの２方法がある。

前者は、(4)式を微分して　　$u,x = \alpha_{11}$　　$v,x = \alpha_{21}$　　$u,xx = v,xx = 0$　(10)

一方、外力ベクトルFとUの関係は剛性マトリックスKを用いて表すと　　$F = KU$　(11)

式(11)の両辺をｘで微分すると次式となる。

$$F_{,x}=K_{,x}U+KU_{,x} \qquad (12)$$

$$F_{,xx}=K_{,xx}U+2K_{,x}U_{,x}+KU_{,xx} \qquad (13)$$

外力は座標に無関係であるから$F_{,x}=F_{,xx}=0$より次式が導かれる。

$$U_{,x}=-K^{-1}K_{,x}U=-K^{-1}U^{*} \quad (U^{*}=K_{,x}U) \qquad (14)$$

$$U_{,xx}=-K^{-1}(2K_{,x}U_{,x}+K_{,xx}U) \qquad (15)$$

剛性マトリックスは $K=\Sigma\triangle/2\times B^{T}DB$ よりｎ番目の三角形要素に対するものを $K_n=\triangle_n/2B_n{}^{T}DB_n$ で表すとその各微分は次式となる。

$$K_{n,x}=1/2\triangle_{n,x}B_n{}^{T}DB_n+\triangle_n/2B_n{}^{T}{}_{,x}DB_n+\triangle_n/2B_n{}^{T}DB_{n,x} \qquad (16)$$

$$K_{n,xx}=\triangle_n B_n{}^{T}{}_{,x}DB_{n,x} \qquad (17)$$

以上で式(5)、(6)の算定に必要な全ての項が求められた。また、ｙ座標による応力の微分値$\sigma_{,y}$、$\sigma_{,yy}$についてもまったく同様にして求められる。

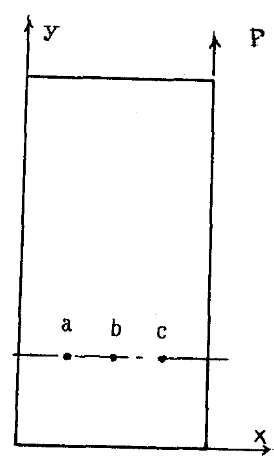
2.3 節点応力の微分値

上記より要素ｎの応力のｉ、ｊ、ｋ節点に於けるｘ、ｙ座標での微分値は計算でき、任意要素について３個の微分値が求まる。今，取り扱おうとしているのは微分値であり非常に局部的である。このような問題に対して一般に有限要素法は問題がある。この困難を避けるための手段として、ｉ節点に集まる要素応力の平均値が用いられる。ここでも，ｉ節点座標で微分したものの平均値をｉ節点応力の微分値として用いる。

３。数値計算

(7)、(8)式で求めた応力の微分値の妥当正を確かめるために、実際の座標移動に伴う応力の変化と１次、２次のテーラー展開での近似値とを比較したものを表－１に示す。図－２に示すようなＰ＝20kgfの偏心荷重が作用する20×40×1cmの板を底辺、高さ共１cmの直角三角形メッシュで一様分割したモデルを用いた。点ｃ（ｙ＝10cm、ｘ＝15cm）の応力を示す。なお，変位の微分値は(12)、(13)式で求めた。応力変化のあるモデルであるが、ｘ座標の変化がメッシュサイズの1/10位あっても良くあっているのがわかる。図ａ、ｂ点でも同様な結果であった。

この微分値を 2.1 の三条件式(1)～(3)に代入してその誤差を調べることにより要素分割の適否、さらには計算精度のチェツクが行えよう。なお、実際の適用例については当日発表する予定である。



図－２　一様板モデル

表－１　修正応力値(kgf/cm²)

	Δｘ＝0.02cm			Δｘ＝0.1cm		
	$\sigma_x(10^{-4})$	σ_y	$\tau_{xy}(10^{-3})$	$\sigma_x(10^{-3})$	σ_y	$\tau_{xy}(10^{-3})$
原　系	3.27000	2.48843	-1.73301	0.32700	2.48843	-1.73301
１次近似	5.07352	2.49014	-1.71728	1.22876	2.49700	-1.65438
２次近似	5.07365	2.49014	-1.71731	1.22908	2.49700	-1.65498
修 正 系	5.07339	2.49014	-1.71758	1.22585	2.49701	-1.68950

（参考文献）中島　他：有限要素法の精度チェツクの一方法，土木学会第43回年次学術講演会