

I-46

節点プリズム要素による3次元応力解析

センチュリリサーチセンタ 正員 小林亨市
長岡技術科学大学 正員 林 正

1. まえがき

長大構造物の3次元応力解析のために、有限プリズム要素¹⁾に節点自由度を付与した3次元ソリッド要素を用いる解析法について報告する。この解法は、節点帯板法^{2), 3)}を3次元解析に拡張したものであり、新たに開発した要素では、多項式による級数と1次多項式にバブル節線を併用した形状関数を用いる。このような解析法を、節点プリズム法(NPM)と呼ぶことにする。

2. 節点プリズム法の定式化

(1) 節点プリズム要素 節点プリズム法では、図-1に示すように、構造物を長手方向(X軸方向)にX軸に垂直な断面でブロック要素に分割し、さらにブロック要素を断面内で三角柱または四角柱などの節点プリズム要素に分割する。このプリズム要素には、図-2に示すように隅角点に8個の節点と、X軸に平行な稜線上に4本の節線(i, j, k, l)を設ける。

任意な断面形状の節点プリズム要素を用いるために、要素座標系として直交デカルト座標系(x, y, z)と、正規化された座標系(ξ, η, ζ)を使用する。ここに、x軸は全体座標系のX軸と平行に選ぶものとし、ξ軸は要素の長さ2aで正規化したものである。また、(ξ, η, ζ)の定義域は-1~1で、その原点は、写像前の親要素の重心点に一致させる。

(2) 一般化変位 要素の自由度として、節点および節線上の(x, y, z)軸方向の並進変位の3成分u, v, wを用いる。したがって、節点に関する一般化変位は24自由度となり、これをベクトルd₀で表す。

$$\mathbf{d}_0 = \{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3, u_4, v_4, w_4, u_5, v_5, w_5, u_6, v_6, w_6, u_7, v_7, w_7, u_8, v_8, w_8\}^T \quad (1)$$

節線に関する一般化変位は、各節線上の変位u, v, wを級数展開したときの係数である。ここで、解析精度を高めるために、先の4本の節線に加えて、2本の内部節線(bubble mode) b₁, b₂を用いる。したがって、節線の第m項に関する一般化変位は18自由度となり、これをベクトルd_mで表す。

$$\mathbf{d}_m = \{u_{1m}, v_{1m}, w_{1m}, u_{jm}, v_{jm}, w_{jm}, u_{km}, v_{km}, w_{km}, u_{lm}, v_{lm}, w_{lm}, u_{b1m}, v_{b1m}, w_{b1m}, u_{b2m}, v_{b2m}, w_{b2m}\}^T \quad (2)$$

(3) 変位関数 親要素内の任意点(ξ, η, ζ)の変位は、節点と節線に関する変位の和によって表されるものとする²⁾。これをd₀, d_mで表すと次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= u_0 + u_1 = \mathbf{f}_{01}^T \cdot \mathbf{d}_0 + \mathbf{f}_{11}^T \cdot \sum U_m \cdot \mathbf{d}_m \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= v_0 + v_1 = \mathbf{f}_{02}^T \cdot \mathbf{d}_0 + \mathbf{f}_{12}^T \cdot \sum V_m \cdot \mathbf{d}_m \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= w_0 + w_1 = \mathbf{f}_{03}^T \cdot \mathbf{d}_0 + \mathbf{f}_{13}^T \cdot \sum W_m \cdot \mathbf{d}_m \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、f_{0i}はFEMの6面体1次要素の形状関数を用いた節点変位に対する形状関数ベクトル、f_{1i}は双1次要素の形状関数を用いた節線変位に対する形状関数ベクトルである。U_m, V_m, W_mはそれぞれの変位成分に対する第m項目の展開関数であり、2次以上の多項式を全成分に対して共通に用いる。

$$U_m = V_m = W_m \equiv X_m(\xi) = (1 - \xi^2) \cdot \xi^{m-1} \quad (m=1, 2, \dots) \quad (4)$$

(4) 平衡方程式 仮想仕事の原理から、次の節点プリズム要素の平衡方程式が得られる。

$$[\mathbf{k}_{00}] \mathbf{d}_0 + \sum_n [\mathbf{k}_{0n}] \mathbf{d}_n = \mathbf{q}_0 + \mathbf{p}_0, \quad [\mathbf{k}_{m0}] \mathbf{d}_0 + \sum_n [\mathbf{k}_{mn}] \mathbf{d}_n = \mathbf{q}_m + \mathbf{p}_m \quad (m=1, 2, \dots) \quad (5)$$

ここに、q₀, q_mは一般化変位d₀, d_mに対応する一般化力、p₀, p_mは荷重の等価節点および節線力である。

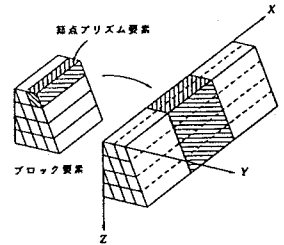


図-1 要素分割

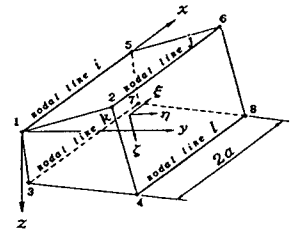


図-2 節点プリズム要素

3. 数値計算例

(1) 角柱の解析 図-3に示す、幅と高さの比が1:5の正方形断面の角柱に、水平集中荷重が作用した場合について解析する。計算では対称性を考慮して、 $x-z$ 平面で切断した1/2領域の解析モデルを用い、1要素で計算する。また、比較のためにFEM(6面体1次要素 $4 \times 8 \times 24$)を用いる。

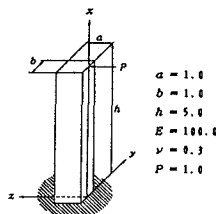


図-3 角柱の解析

1要素による $y=0, z=1.0$ での z 軸方向変位 w を図-4に示す。変位 w は展開項数が3項($M=3$)でFEM解とほぼ一致しており、5項ではFEM解およびより理論による解に完全に一致した。

(2) 箱桁橋の解析 図-5に示すような満載等分布荷重 q が作用する厚肉断面の単純支持箱桁橋を解析する。計算では対称性を考慮して幅員方向の1/2領域を解析し、これを図のように横断面内のみで15要素に分割する。また、比較解を得るために、FEM要素を用いて、図-6に示すように全体の1/4領域を19×51要素に分割する。なお、荷重には q のほかに自重(γc :材料の単位体積重量)を考慮した。

図-7に、幅員中心線上的下フランジ下面のたわみ w と応力 σ_x の分布を示す。展開項数を3項用いた値は、応力でわずかな差が見られるがほぼ5項の値に一致している。FEM解とは、スパン中央点の最大値で約5%の差がある。さらに、横断面内の分割を図-6のFEMと同一にした51要素で計算した結果は、先述の最大たわみで0.14%, 最大応力で0.06%増加しただけである。この結果から、FEMではまだ要素分割が足りないものと考えられる。

両解法の全自由度数を比較すると、15要素で3項用いた節点プリズム要素は750自由度、FEMは4800自由度である。本解析法は、通常の有限プリズム要素に比べて節点自由度が多くなるが、同様な計算例を横断面内に8節点セレンディピティ要素を用いた有限プリズム要素で計算したときの要素分割¹⁾に比べると、自由度数はかなり少ない。

以上のように、節点自由度と多項式による級数を用いたことにより、種々の境界条件に適用できて、収束性や精度のよい解を得ることができた。

4. あとがき

本研究で開発した節点プリズム法について以下のことがいえる。

- (1) 節点を付与したことにより、従来の有限プリズム法の適用範囲を拡張することができた。
- (2) 多項式による級数の収束性はよく、精度のよい解が得られる。
- (3) 級数に対する境界条件の制約はなく、かつ、従来の固有関数を用いた式よりも数値計算が容易である。

- 1) Cheung, Y.K.: Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Press, pp.173~198, 1976.
- 2) 笹戸・林・中嶋・中島: 節点帯板法による薄肉構造物の解析, JSSC第9回, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 1985.
- 3) 笹戸・林: 節点帯板法による補剛円筒殻の解析, 同上.

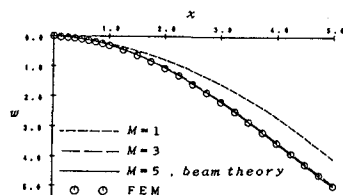
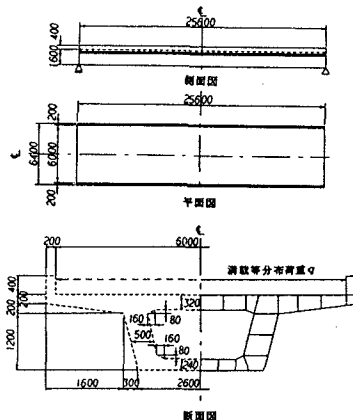
図-4 変位 w の分布

図-5 箱桁橋の計算例

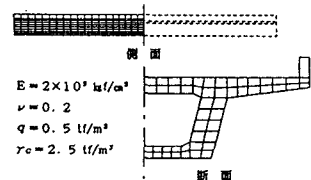


図-6 FEMの要素分割

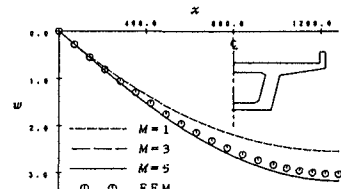
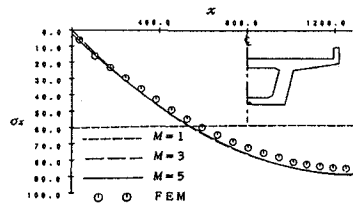
(a) たわみ w の分布(b) 応力 σ_x の分布

図-7 15要素による計算結果