

I-28 積分方程式法による動的クラック形状決定問題の解法

京都大学工学部 正 ○西村直志
 京都大学工学部 正 小林昭一
 建設省 山本 巧
 京都大学大学院 古川 篤

1. 序

本報では、超音波を用いた非破壊検査を念頭に置き、部材内部のクラック形状を決定する逆問題の周波数域及び時間域での積分方程式による解法を提案する。

2. 周波数域での逆問題とその解法

ある3次元有界領域 D が単一のクラック S を含んでいる事が解っているが、その位置及び形状は不明であるとする。この時、超音波などの波動方程式に支配される物理量 u を用いた実験を行い、得られたデータから S を決定する問題を考える。先ず周波数域での解析を想定すれば、 u の Fourier 変換(記号の節約のため u と書く)は Helmholtz 方程式

$$(\Delta + k^2)u = 0 \quad \text{in } D \setminus S \quad (k: \text{波数})$$

に支配される。クラック上で斉次 Neumann 条件を要求すると u は次の積分方程式を満たす事が解る:

$$\frac{u}{2} = \int_{\partial D} G \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial n} u dS + \int_S \frac{\partial G}{\partial n} \varphi dS \quad \text{on } \partial D \quad (1)$$

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial n} \right) \left(\int_{\partial D} G \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial n} u dS + \int_S \frac{\partial G}{\partial n} \varphi dS \right) \quad \text{on } S \quad (2)$$

ここに $G = (1/4\pi)e^{ikr}/r$ (基本解) 及び $\varphi := u^+ - u^-$ は S 上での u の不連続量である。

逆問題に於いては ∂D で u を与え、 $\partial u/\partial n$ を測る、またはその逆に相当する実験を3回以上行い、それから S を決定する。具体的には形状 S の関数 $J(S)$ を導入し、それを最小とする S を逆問題の解とする。 $J(S)$ の定義としては、先ず各実験データから(2)の ∂D 上の積分を求め、同式を φ について解き、それを(1)に代入したときの誤差の絶対値の自乗を ∂D で積分したものをを用いる。超特異積分方程式(2)の解法としては変分法を用い¹⁾、 $J(S)$ の最小化には Powell の可変計量法を用いた。この場合、 $J(S)$ のクラック形状パラメータに関する微分が必要となるが、これは解析的に評価した。

Fig.1 に解析例を示す。領域 D は辺長 l の立方体とし、クラックは円形とする。正解のクラック及び初期仮定は同図に示す。波数は $kl = 3.2$ とし、境界で与えた Dirichlet データは $u = e^{ikx_I}$, $I = 1 \sim 3$ の3個である。対応する Neumann データは数値シミュレーションで作り、誤差は与えていない。提案する逆解析により正解への収束が得られた。

3. 時間域での逆問題とその解法

実際の非破壊検査ではクラックからの散乱波の立上がり部分に S の形状情報が多く含まれているであろう。従って時間域の解析により逆問題が効率よく解けるものと予想される。ここでは、前節同様波動方程式に支配される物理量 u を対象とし、簡単のため2次元問題を考える。またクラック寸法に比べて十分遠方で計測を行う事を想定して考える領域は R^2 とする。

入射波 u_I が traction free のクラック S によって散乱波 $u_S := u - u_I$ を生ずる場合、開口変位 φ は次の積分方程式の解となる:

$$0 = \frac{\partial u_I}{\partial n} + \oint_S \int_0^t \frac{\partial^2 G}{\partial n_x \partial n_y} \varphi ds dS_y \quad \text{on } S \quad (3)$$

ここに, $G = (1/2\pi)(t^2 - r^2)_+^{-1/2}$ であり, 積分は有限部分の意味である. また, 波速は無次元化により1とした. 式(3)を φ について解けば, u_S の遠方場 $u_f(u_I, \hat{x}, T)$ ($u_S \sim u_f/(2\pi\sqrt{2|\hat{x}|})$) は次式で求まる:

$$\int_S \int_0^{T+\hat{x}\cdot y} \frac{\hat{x} \cdot n \dot{\varphi}(y, s)}{\sqrt{T-s+\hat{x}\cdot y}} ds dS_y, \quad \hat{x} := \frac{x}{|x|}, \quad T := t - |x|$$

対応する逆問題は次の様に定式化される: N 個の入射波 u_I^n ($n = 1 \sim N$) に対する遠方場を M 個の方向 $\hat{x}^m$ ($m = 1 \sim M$) で時刻 T_k ($k = K^1 \sim K^2$) に於いて計測し, 得られたデータに適合するクラックを決定する. ここに, $K^{1,2}$ は測定開始, 終了時刻を表す添字である. 数値解析に於いては, 前節同様コスト関数 $J(S)$ を導入し, 最小化問題に変換すれば良い. コストは次のように定義する:

$$J(S) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{k=K_{m,n}^1}^{K_{m,n}^2} (u_f^S(u_I^n, \hat{x}^m, T_k) - u_f^0(u_I^n, \hat{x}^m, T_k))^2$$

ここに u_f^0, u_f^S はそれぞれ遠方場の計測値, 及びクラック位置が S であるときの計算値である. 前節同様 $J(S)$ をクラック形状パラメータで解析的に微分する事が出来, 可変計量法により S が決定される.

Fig.2 に解析例を示す. クラックは直線とし, 正解のクラック及び初期假定は同図に示す. 解の発散を防ぐためクラックの探索は原点中心, 半径 $3a$ の領域に限定した. ここに a は初期假定の半クラック長である. 入射波は平面波とし, その時間変動は $f(t) = 1 - \cos(t/a)$ ($0 \leq t \leq 2\pi a$ のとき), $= 0$ (その他), 進行方向は $x_{1,2}$ 方向 ($N = 2$) とする. 遠方場は $\hat{x} = (\cos\theta, \sin\theta)$, ($\theta = 60^\circ, 180^\circ, -60^\circ$) の3方向で計測した. 計測時刻は時間増分 $\Delta t = 0.3a$ として立ち上がりより15ステップとした. なお, 計測は数値シミュレーションで代用し, 最大値の30%の一樣ランダム誤差を加えた. 逆解析の結果, 十分正解に近い解が得られた.

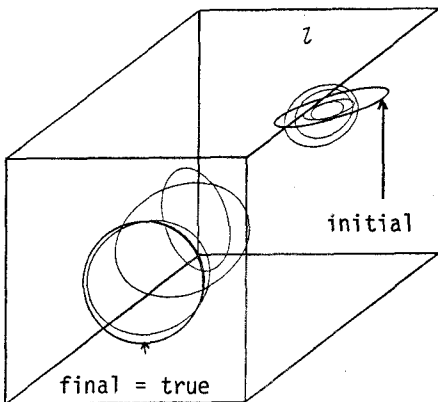


Fig.1 3D inversion in freq. domain

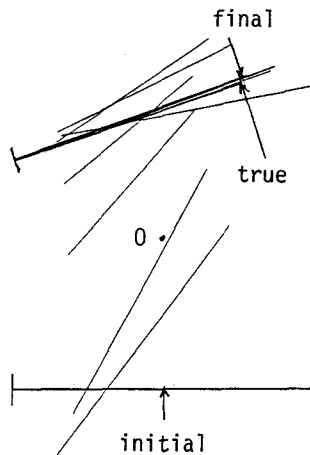


Fig.2 2D inversion in time domain

文献

- 1) Nishimura, N. & Kobayashi, S., to appear in Int. J. Num. Meth. Eng., 1991.