Ⅰ-27　有限要素法と境界要素法の重ね合わせによるクラック進展解析手法

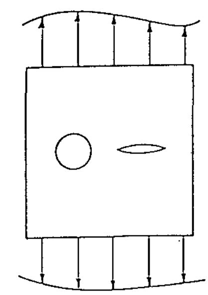
建設省　正員　板屋英治
東京大学　正員　山口栄輝
東京大学　正員　堀井秀之

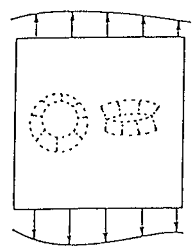
1. まえがき

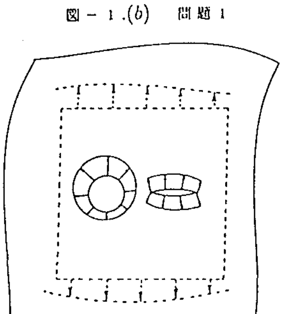
我々が取り扱う工学問題には、非線形な構成式とクラックに代表される不連続面を同時に考慮すべき問題が数多くある。例えば、地盤の支持力問題においては、材料の弾塑性挙動に起因する非線形性を構成式で捉えると同時に、変位の不連続面であるすべり面を取り扱う必要がある。既存の有力な数値解析手法として、有限要素法と境界要素法の二つの手法が挙げられる。しかしながら、有限要素法は、非線形問題は比較的容易に扱えるが、クラック問題には適用していないという面を持ち、また、境界要素法では、クラックの取扱いは容易にできるのに対し、非線形な問題には適用していないという面を持っている。このため、いずれの手法を用いても、クラックと非線形な構成式を同時に取り扱うことは難しい。そこで、有限要素法と境界要素法とを重ねることにより、２つの解析手法のそれぞれの長所を生かした新しい数値解析手法を開発することを考える。本研究では、第一段階として線形な弾性問題についてのみ考える。

2. 有限要素法と境界要素法の重ね合わせ

図１ a で与えられるような、クラック境界と一般内部境界を有する有限の二次元線形等方弾性体の問題の定式化を行う。この問題を、図１ a の問題と同一形状の外部境界を持つが内部境界を持たない有限体の問題 1(図１ b) と、無限体中に図１ a の問題と同一形状の内部境界を持つ問題 2(図１ c) に分割する。それぞれの問題を、問題１は有限要素法によって解き、問題２は境界要素法によって解くことにする。この場合、問題１では、外部境界に与えられた境界条件によって、内部境界の位置に変位と表面力が発生し、問題２では、内部境界に与えられた境界条件によって、外部境界の位置に変位と節点力が発生する。これらの境界量を内部境界と外部境界のそれぞれについて重ね合わせ、本来の問題の境界条件を満足させるように、未知の境界量を求めることによって，本来の問題の解を得ることができる。

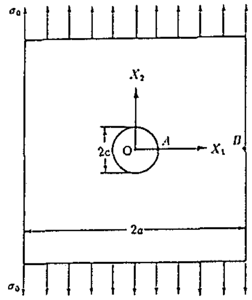

図－１.(a)　本来の問題


図－１.(b)　問題１

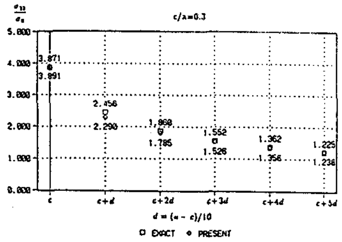

図－１.(c)　問題２

3. 数値解析例と結果

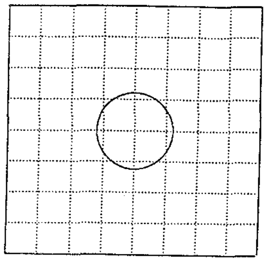
この解析手法の有効性を示すために、円孔を有する矩形板の問題(図２ a) とクラックを有する矩形板の問題(図３ a) の解析を行った。円孔問題については、図２ a に示すように、点Ａと点Ｂ間を10 等分し点Ａから６点選び出し、それぞれの点における応力σ_{22}と一様引張り応力σ_0との比σ_{22}/σ_0について解析解と厳密解を比較した(図２ b)[１]。ただし、要素分割は FEM 問題が正方形分割の 64 要素、BEM 問題が等分割の 80 要素で (図２ c)、計算例は $c/a = 0.3$ の場合である。図２ b より解析解と厳密解がよく一致していることが分かる。また、クラック問題については、$\alpha = \frac{2a}{W}$、$\beta = \frac{2H}{W}$ としたとき、$\beta = 1.0$ において$\alpha = 0.1$ から 0.1 刻みで 0.5 までのそれぞれのケースの応力拡大係数 K_Iを求め、解析解と厳密解を比較した(図３ b)[２]。ただし、その場合の要素分割は、FEM 問題では正方形分割の 81 要素、BEM 問題では等分割の 50 要素である (図３ c)。この場合も前者同様、解析解は厳密解によく一致し、精度上問題のない結果が得られている。



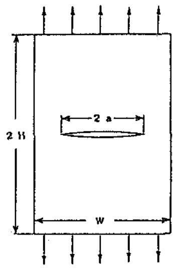
図－２.(*a*) 円孔問題



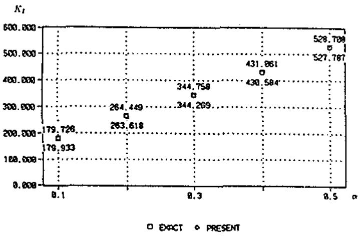
図－２.(*b*) $\frac{\sigma_{22}}{\sigma_0}$ の比較



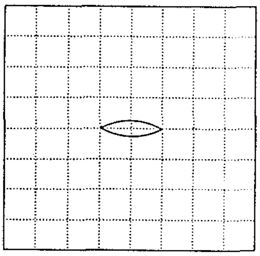
図－２.(*c*) 要素分割例



図－３.(*a*) クラック問題



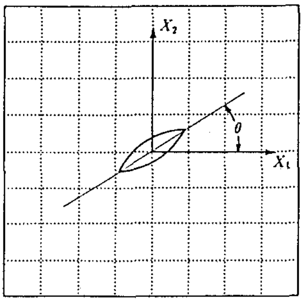
図－３.(*b*) 応力拡大係数 K_I の比較



図－３.(*c*) 要素分割例

4. 考察

新数値解析手法の有効性を示すために、円孔を有する矩形板とクラックを有する矩形板の弾性問題についての簡単な計算例を示したが、それぞれの問題において求められた解析結果は、厳密解に対して十分な精度で求められている。これらの問題に対して、円孔の直径 $2c$ と矩形板の幅 $2a$ の比$\frac{c}{a}$や、クラックの長さ $2a$ と矩形板の幅 W の比$\frac{2a}{W}$を変化させ、また、*FEM*問題や *BEM*問題の要素分割数を変化させて計算を行った結果、*FEM*問題における要素分割は粗い要素分割で精度の良い会が得られることが分かった。*FEM*の要素分割はクラックや円孔などの内部境界の位置にかかわらず行うことができる。例えば、図４のようにクラック境界が、X_1軸に対して角度θ傾いている場合においても、厳密解と解析解を比較すると、角度θに依存することなく、解析解は十分な精度で得ることができる。



5. まとめ

以上、有限要素法と境界要素法の重ね合わせによる新しい数値解析手法の有効性が示された。従来、有限要素法では、クラック境界を有する問題において、クラック境界付近の要素分割は複雑なものとなっていたが、この手法を用いた場合、有限要素法によって解かれる問題の要素分割は、内部境界の形状や位置に無関係に、粗い要素分割で十分に対応することができる。このことは、クラックの進展に伴って、新たに要素分割を行う必要がないことを意味しており、ここで提案する解析手法が、クラックの進展解析に有効であることを示している。

また、本研究においては、線形な弾性問題についてのみ扱ったが、本手法で用いる有限要素法に、非線形を導入することによって、クラックと非線形を同時に考慮すべき問題に対して、容易に拡張し適用することが可能である。

6. 参考文献

[1] Schlack,A.L.and Little,R.W.: Elastostatic problem of a perforated square plate,Eng.Mech.Div. ,ASCE,90(EM5),pp.171-187,1964

[2] Murakami,Y.(Editor-in-chief): Stress Intensity Factors Handbook , Pergamon Press,1987.