I－17

微視構造を持つ材料の連続体理論について

埼玉大学 工学部　奥井義昭
東京大学 工学部　堀井秀之
埼玉大学 工学部　秋山成興

１．はじめに

材料内部の微視構造（マイクロクラック etc.）の変化を個々のマイクロクラックに着目して解析するのではなく、等価な連続体に置き換えて解析する方法として損傷理論(Continuum Damage Mechanics 以下 CDM)が挙げられるが、CDM では圧縮荷重下における岩石のせん断面の形成といった、局所化およびパターンフォーメーションの過程が表現出来ない。局所化の過程が表現出来るか否かと言った問題は、材料の耐荷力に直接的に関与する事から、この種の連続体モデルの最も重要な点と言える。従って、本報告では局所化を誘起する情報として、微視構造間の相互干渉に着目し、これを取り込んだ連続体モデルについて報告する。また、具体的な微視構造としては圧縮荷重下の岩石の微視構造をモデル化した２次元問題を考える事とし、最初に連続体モデルの基本的な概念について説明し、その後相互干渉効果の取り込み方について CDM との比較をとうして説明する。

２．微視構造モデル

圧縮荷重下における岩石の微視構造モデルとして、中央部に集中荷重 Fが作用する長さ $2l$のクラックを考える（Fig.1 参照)。集中荷重の大きさについては最小主応力 σ_{22} によって次式で表されるものとする。

$$F = \lambda c_0 \sigma_{22} \tag{1}$$

ここで、c_0は長さの基準量、λは初期欠陥上の摩擦係数等により決まる量であり材料定数と仮定する。

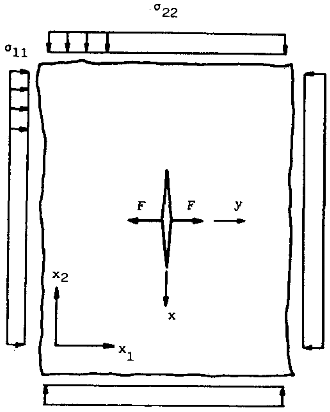

Fig.1 微視構造モデル

３．連続体モデル

Fig.2 に示すように Fig.1 の微視構造モデルが多数存在する材料を考える。マイクロクラックを離散的に含む材料と等価な連続体に置き換える。そのため、材料内部での局所的な平均応力 $\hat{\sigma}_{ij}$、平均歪 $\hat{\varepsilon}_{ij}$、平均変位 $\hat{u}_i$ を定義し、通常の微少変位のつり合い式、歪–変位関係が平均量についても成立するものと仮定する。これより、クラック長 l も連続な場の変数として取り扱う事が出来る。しかし、この等価の連続体を規定するためには Fig.2 に示すように平均応力と平均歪の関係、およびクラック長の進展則が必要となる。平均応力–歪関係の誘導においては、クラック間の相互干渉による効果は小さいものと仮定し無視する。この場合、平均応力と平均歪の間の弾性定数はクラック長 lとクラック密度ρの陽な形で表現出来る [1]。以下では、損傷の進展則について相互干渉の効果を取り入れた定式化を行う。

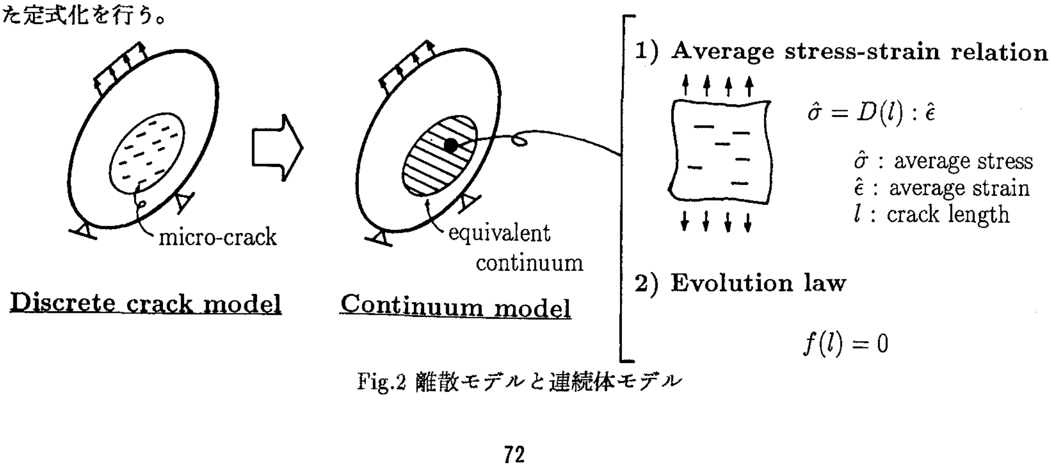

Fig.2 離散モデルと連続体モデル

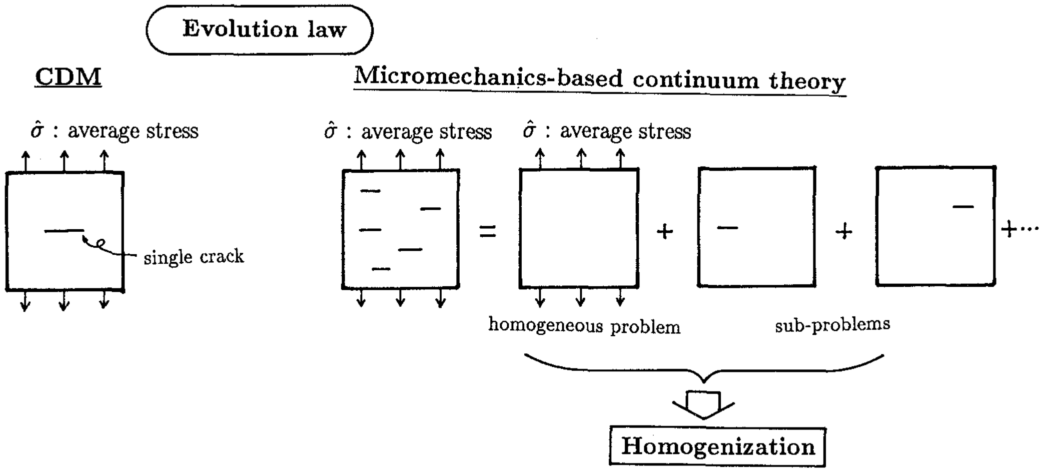

Fig.3 CDM と本理論の損傷の進展則の比較

4．相互干渉効果

損傷の進展則について、CDM と本研究の計算法の違いを Fig.3 に示す。CDM では無限体に単一のクラックがある場合を考え、これに平均応力が作用するものとしてクラック先端の応力拡大係数を求めている。したがって、応力拡大係数 K_I は平均応力 $\hat{\sigma}$ のみの関数となる。一方、本報告の理論では無限体に複数クラックがある場合を考え、これに平均応力が作用するものとする。さらに、相互干渉効果を考慮するため問題を複数の問題に分割する。これに、均質化操作を施す事によりモードＩにおける応力拡大係数は次式で与えられる。

$$K_I \;=\; \sqrt{\pi l}(\hat{\sigma}_1+\sigma_1^P)+\frac{\lambda c_0}{\sqrt{\pi l}}(\hat{\sigma}_2+\sigma_2^P) \tag{2}$$

ただし、$\{\hat{\sigma}_{11},\hat{\sigma}_{22},\hat{\sigma}_{12}\}=\{\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_2,\hat{\sigma}_6\}$。(2) 式用いればクラック（損傷）の進展則は応力拡大係数 K_I が破壊じん性値 K_c に達した際に進展するものとする。すなわち、損傷面 $f=K_I-K_c$ と置くと下記の通り。

$$\begin{cases} f=0 \;\;;\;\; \delta l\geq 0 \;\; (\text{クラック進展の可能性あり}) \\ f<0 \;\;;\;\; \delta l=0 \;\; (\text{クラック進展せず}) \end{cases} \tag{3}$$

(2) 式において、σ_i^P はクラック間の相互干渉によって生じる見かけの応力であり、Fig.3 に示す分割された問題を重ね合わせたときに元の問題一致しなければならないため次の条件が必要になる。

$$\sigma_i^P(\boldsymbol{x})=\int_V \rho\gamma_{ij}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\xi})(\hat{\sigma}_j(\boldsymbol{\xi})+\sigma_j^P(\boldsymbol{\xi}))d\boldsymbol{\xi} \qquad (i,j=1,2,6) \tag{4}$$

$$[\gamma_{ij}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\xi})]=\frac{1}{2}\left(\frac{l(\boldsymbol{\xi})}{d}\right)^2\begin{bmatrix} 2\cos 2\phi-\cos 4\phi & \frac{2\lambda c_0}{\pi l(\boldsymbol{\xi})}(2\cos 2\phi-\cos 4\phi) & \sin 2\phi-\sin 4\phi \\ \cos 4\phi & \frac{2\lambda c_0}{\pi l(\boldsymbol{\xi})}\cos 4\phi & \sin 2\phi+\sin 4\phi \\ \sin 2\phi-\sin 4\phi & \frac{2\lambda c_0}{\pi l(\boldsymbol{\xi})}(\sin 2\phi-\sin 4\phi) & \cos 4\phi \end{bmatrix} \tag{5}$$

ここで、$l(\boldsymbol{\xi})$ は $\boldsymbol{\xi}$ 位置でのクラック長、$d=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\|$, $\tan(\phi-\pi/2)=(x_2-\xi_2)/(x_1-\xi_1)$。

以上より、つり合い式、平均応力–歪関係、変位–歪関係を用いれば通常の FEM の離散化により剛性方程式が得られる。これと、(3),(4) 式を連立して解く事により材料の変形挙動が計算できる。

5．まとめ

微視構造を持つ材料の連続体理論について報告を行った。局所化を表現出来る連続体モデルを考えるためには、微視構造間の相互干渉を考慮する事が大切であり、また、微視構造を持つ材料では微視構造から生じる方程式（例えば今回の問題の場合 (4) 式）も考慮する必要がある。

参考文献　[1] 奥井、松田、堀井、秋山；損傷理論による圧縮荷重下における脆性材料の変形解析，土木学会第 46 回年次学術講演会（平成３年）