

I-12

移動座標系による大変形を伴う
Timoshenko梁の動的解析

東京電機大学 正員 井浦雅司

東北大学 正員 岩熊哲夫

1. はじめに

宇宙構造物に代表される、柔軟大型構造物に関する研究はこれまでも多くの注目を集めており、特に幾何学的非線形性を考慮した動的解析に関する研究は数多く報告されている。これまで動的解析にはTotal Lagrangian法が多く用いられており、さらに用いる座標系について大別すると、固定座標系を用いる手法と移動座標系を用いる手法とに分けられる。固定座標系はこれまで広く利用されており[1,2]、その利点は剛体に関する古典動力学の手法がそのまま弾性体に対しても適用でき、慣性項の表現が簡潔となることである。一方、移動座標系はこれまで、剛体の動的解析や静的な幾何学的非線形解析に広く用いられてきたが、最近では、柔軟な構造の大変形動的解析[3]にも用いられている。

本論文は、せん断変形を考慮した骨組部材の大変形動的解析を対象として、移動座標系による定式化を試みたものである。さらに、宇宙構造物などに使用されるであろう中間にヒンジを有する構造物の解析にも言及する。本論文で使用する主要な仮定は以下の通りである。

(仮定): 有限要素法の使用を前提とすれば、要素数を増すことにより、各要素の移動座標系からみた極端には短くないTimoshenko梁の変形には微小変位理論が適用できる。

2. Timoshenko梁の定式化

移動座標系の設定には様々な方法があるが、本論文では、変形後の横断面に垂直に変形後の軸座標を取る方法[4]を用いている。この方法の利点は、移動座標系に関して、接点*i* (Fig.1)における変位成分が全て零となり、剛性マトリックスの縮小が可能であることと、移動座標系と固定座標系との角度を計算する際にarctanやarcsinなどを用いていないため、特別な計算テクニックを必要としないことである。

変形後の部材内の位置ベクトル $\mathbf{r}$ は、埋め込み座標 $\xi (=x^1)$, $\eta (=x^2)$ により以下のように書ける。

$$\mathbf{r} = \{A\}\{E\} + (\{X\} + \eta\{z\})\{e\} \quad (1)$$

ここに、 $\{A\} = \{U_1, V_1, 0\}$, $\{E\} = \{E_1, E_2, E_3\}^T$, $\{X\} = \{\xi + u_0, v_0, 0\}$, $\{z\} = \{-\phi_0, 1, 0\}$, $\{e\} = \{e_1, e_2, e_3\}^T$ である。 U_1, V_1 は固定座標よりみた変位成分を、 u_0, v_0, ϕ_0 は移動座標よりみた変位成分を示している。Timoshenko梁の運動エネルギー K は、 m を単位体積当たりの質量とし、

$$K = \frac{1}{2} \int m (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) dV \quad (2)$$

と書ける。式(1)を式(2)へ代入し、断面方向と棒軸方向に関して積分を行えば運動エネルギーは陽な形で求まり、移動座標系を用いた場合と異なり、数値積分を用いる必要はない。

次に、梁に蓄えられる歪みエネルギーについて考える。Timoshenko梁においては、歪みエネルギーは

$$\Pi_s = \int_{[0, L]} \left[\frac{1}{2} E A_0 \epsilon^2 + \frac{1}{2} E I \kappa^2 + \frac{1}{2} G A_s \gamma^2 \right] d\xi \quad (3)$$

と表わされる[4]。前述の(仮定)より、固定座標系からみた梁の変形がいかに大きくとも、移動座標系よりみた梁の変形は微小であることから、歪みエネルギーは線形理論より得られる剛性マトリックス $[K]$ (文献[4])を用いて以下のように表わせる。

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\}, \quad \{\delta\} = \{u_j, v_j, \phi_j\}^T \quad (4), (5)$$

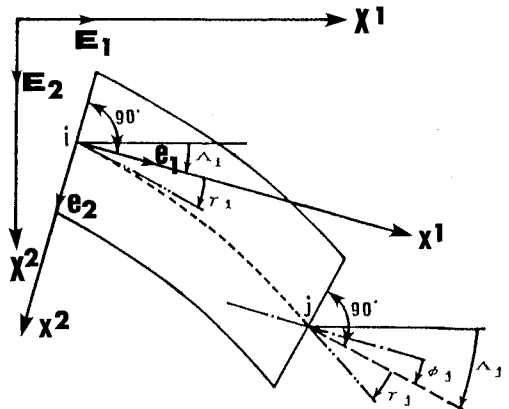


Fig.1 Timoshenko Beam

ここに、 $\{\delta\}$ は移動座標系よりみた変位成分であることに注意を要する。

以上で、運動エネルギーと歪みエネルギーが移動座標系 x^a を基準に表わされたことになり、次に、これらを固定座標系 X^A よりみた変位成分で表わせばよい。これについては文献[4]を参照されたい。

3. 運動方程式とその解法及び数値計算例

本論文では、上で得られた運動エネルギーと歪みエネルギーを基に、Hamiltonの原理を用いて運動方程式を誘導している。得られた運動方程式の積分方法として、ここでは直接積分法の代表的解法の1つであるRunge-Kutta-Gill法により積分する。すなわち、時間に関して2階の運動方程式を1階の連立微分方程式に変換しており、増分形に変換する必要はない。数値計算例としてFig. 2に示すように、部材の端部に集中外力と集中モーメントを受ける両端自由梁(Flying Spaghetti)を考える[1]。要素数は20、 $\Delta t = 0.005$ であり、Simoらの結果と良い一致がみられる。次に、中間にヒンジを有する構造物の例として、スライダ・クランクを考え、数値結果をFig. 3に示す。ヒンジの取り扱い方については紙面の都合上省略する。

4. 参考文献

[1] Simo and Vu-Quoc : J. Appl. Mech., Vol.53, 1986. [2] Iura and Atluri : Compt. and Struct., Vol. 29, 1988. [3] 増田 他 : 土木学会年次講演会, 第1部門, 1990. [4] Iwakuma et al.: Proc. of JSCE, No.380, 1987.

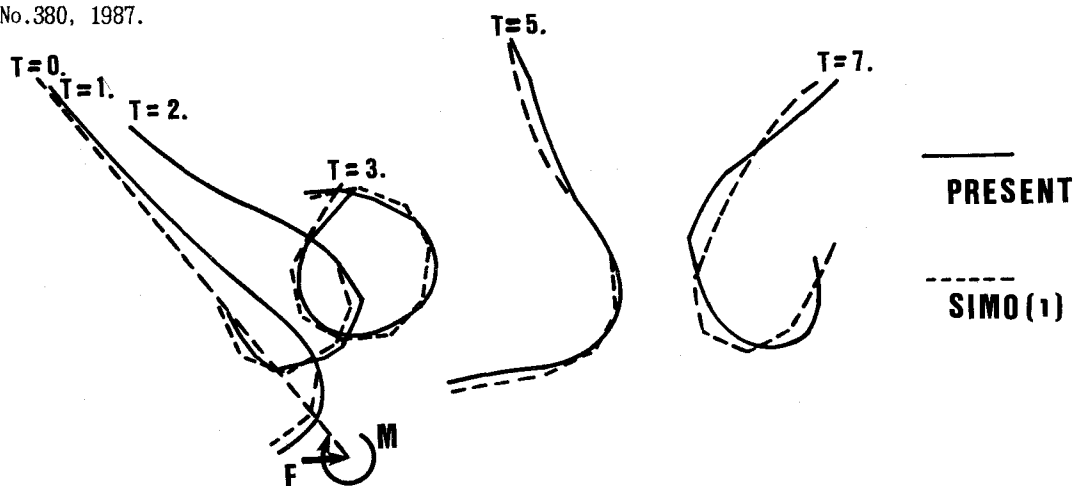


Fig.2 Flying Spaghetti

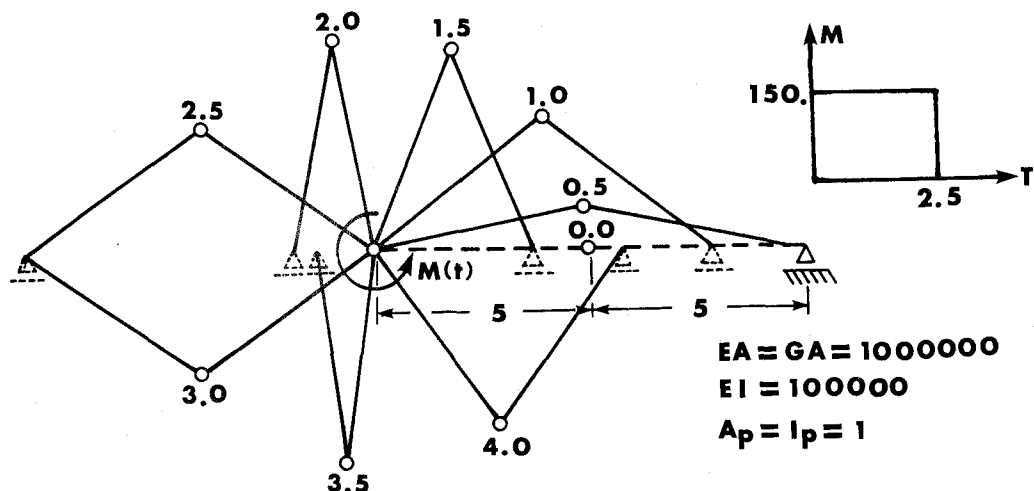


Fig.3 Slider-Crank