

I-9 面内圧縮荷重を受ける平板の有限変位解析

長崎大学 正員 ○森田千尋
 長崎大学 正員 松田 浩
 長崎大学 正員 崎山 毅
 長崎大学 学生員 富重健一

1. まえがき

本研究は、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより、非線形性を考慮した平板の解析的近似解を求め、これに基づく平板の有限変位解析法を提示したものである。本報告において提示される平板の有限変位解析法は、たわみ関数を仮定する必要がなく、固定辺を含む境界条件の場合も容易に解析することができる。

2. 平板の基礎微分方程式とその解析的近似解

板厚中央面上の x, y 方向の面内変位成分を u, v および垂直方向の変位成分を w とし、面内力を N_{xy}, N_y および N_x , せん断力を Q_y, Q_x , ねじりモーメントを M_{xy} , 曲げモーメントを M_y, M_x , たわみ角を θ_y, θ_x とすれば、せん断変形の影響を考慮した平板の増分形の基礎微分方程式は、次のようになる。

(1) 面外変形に関する基礎微分方程式

$$\Delta Q_{x,x} + \Delta Q_{y,y} - D^*(N_x - \nu N_y) \Delta M_x - D^*(N_y - \nu N_x) \Delta M_y - 2D^*(1 + \nu)N_{xy} \Delta M_{xy} + \Delta q + \Delta N_c = 0 \quad (1-1)$$

$$\Delta M_{x,x} + \Delta M_{xy,y} - \Delta Q_x = 0 \quad (1-2)$$

$$\Delta M_{y,y} + \Delta M_{xy,x} - \Delta Q_y = 0 \quad (1-3)$$

$$\Delta \theta_{y,x} + \Delta \theta_{x,y} = 2 \Delta M_{xy} / [D(1 - \nu)] \quad (1-6)$$

$$\Delta \theta_{x,x} + \nu \Delta \theta_{y,y} = \Delta M_x / D \quad (1-4)$$

$$\Delta w_{,x} + \Delta \theta_x = \Delta Q_x / (\kappa G h) \quad (1-7)$$

$$\Delta \theta_{y,y} + \nu \Delta \theta_{x,x} = \Delta M_y / D \quad (1-5)$$

$$\Delta w_{,y} + \Delta \theta_y = \Delta Q_y / (\kappa G h) \quad (1-8)$$

(2) 面内変形に関する基礎微分方程式

$$\Delta N_{x,x} + \Delta N_{xy,y} = 0 \quad (2-1)$$

$$\Delta u_{,x} + \nu \Delta v_{,y} + \Delta W_{xc} = \Delta N_x / F \quad (2-3)$$

$$\Delta N_{y,y} + \Delta N_{xy,x} = 0 \quad (2-2)$$

$$\Delta v_{,y} + \nu \Delta u_{,x} + \Delta W_{yc} = \Delta N_y / F \quad (2-4)$$

$$\Delta u_{,y} + \Delta v_{,x} + \Delta W_{xyc} = 2 \Delta N_{xy} / [F(1 - \nu)] \quad (2-5)$$

ここに、 $\Delta Q_{x,x}$ は $\partial \Delta Q_x / \partial x$ を表わし、 $q = q(x, y)$: 横荷重強度、 $G = E/[2(1 + \nu)]$: せん断弾性係数、

E : 弾性係数、 ν : ポアソン比、 $\kappa = 5/6$: せん断修正係数、 $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$: 板の曲げ剛度、

$D^* = 1/[D(1 - \nu^2)]$, $F = Eh/[(1 - \nu^2)]$: 板の面内剛度、 h : 板厚、 Δ : 断面力および変形量の増分、

$\Delta N_c, \Delta W_{xc}, \Delta W_{yc}, \Delta W_{xyc}$: 各荷重増分段階における不平衡力および非線形項

面外変形に関する式(1-1)~(1-8)および面内変形に関する式(2-1)~(2-5)において、無次元量 $X_1 \sim X_8, X_9 \sim X_{13}$ および η, ζ

$$X_1 = a^2 Q_y / [D_0(1 - \nu^2)], X_2 = a^2 Q_x / [D_0(1 - \nu^2)], X_3 = a M_{xy} / [D_0(1 - \nu^2)], X_4 = a M_y / [D_0(1 - \nu^2)],$$

$$X_5 = a M_x / [D_0(1 - \nu^2)], X_6 = \theta_y, X_7 = \theta_x, X_8 = w/a, X_9 = v/a, X_{10} = u/a, X_{11} = a^2 N_{xy} / [D_0(1 - \nu^2)],$$

$$X_{12} = a^2 N_y / [D_0(1 - \nu^2)], X_{13} = a^2 N_x / [D_0(1 - \nu^2)], \eta = x/a, \zeta = y/b,$$

$$a, b$$
: 平板の縦横の辺長、 $\mu = b/a, h_0$: 基準板厚、 $D_0 = Eh_0^3/[12(1 - \nu^2)]$: 基準板剛度

を導入し無次元化後、領域 $[i, j]$ において面積分することにより積分方程式に変換し、次に積分方程式の近似解法を応用すると、平板の縦横の等分割線の交点に関する離散解 $\Delta X_{pij}(p=1 \sim 8, 9 \sim 13)$ は、それぞれ次のように整理される。

$$\Delta X_{pij} = \sum_{a=1}^8 \left(\sum_{k=0}^i a_{pijkd} \Delta X_{rk0} + \sum_{l=0}^j b_{pijld} \Delta X_{s0l} \right) + \Delta q_{pij} \quad (3-1)$$

($r=1, 3, 4, 6, 7, 8, s=2, 3, 5, 6, 7, 8$)

$$\Delta X_{pij} = \sum_{d=1}^4 \left(\sum_{k=0}^i a_{pijkd} \Delta X_{tk0} + \sum_{l=0}^j b_{pijld} \Delta X_{u0l} \right) + \Delta q_{pij} \quad (3-2)$$

(t=9, 10, 11, 12, u=9, 10, 11, 13)

式(3-1), (3-2)の導入過程については, 文献1)を参照されたい。

3. 境界条件

本研究で扱う平板は, Fig. 1 に示すようにx方向の対辺に面内圧縮荷重Pを受け, 面内変形に対して, y方向の対辺に直角な方向の変位を拘束しないものであり, 面外変形に対しては, 非載荷辺は単純支持で, 載荷辺は単純支持(Case 1)と固定(Case 2)の2種類のものである。

[面内変形に対する境界条件]

$$u = \text{一定} \quad x=0, x=a$$

$$P = \int_0^b \sigma_x dy \quad x=0, x=a$$

$$N_{xy} = 0 \quad x=0, x=a, y=0, y=b$$

$$N_y = 0 \quad y=0, y=b$$

[面外変形に対する境界条件]

Case 1: $M_x = 0 \quad x=0, x=a$
 $\theta_y = 0 \quad x=0, x=a$
 $w = 0 \quad x=0, x=a, y=0, y=b$
 $M_y = 0 \quad y=0, y=b$
 $\theta_x = 0 \quad y=0, y=b$

Case 2: $\theta_y = 0 \quad x=0, x=a$
 $\theta_x = 0 \quad x=0, x=a$
 $w = 0 \quad x=0, x=a, y=0, y=b$
 $M_y = 0 \quad y=0, y=b$
 $\theta_x = 0 \quad y=0, y=b$

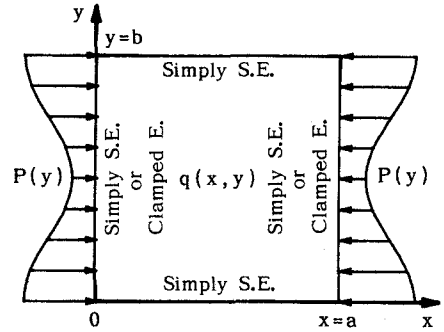


Fig. 1 面内圧縮荷重

4. 数値解析結果

初期たわみ(w_0/h)を有する平板の有限変位解析を行なった。Fig. 2 に, 周辺単純支持の場合の中央点の荷重～たわみ曲線を, また, Fig. 3 に, 載荷辺固定非載荷辺単純支持の場合の中央点の荷重～たわみ曲線をそれぞれ示す。同図中●印および▲印は Yamaki²⁾ による級数解であり, 計算結果とよく一致している。

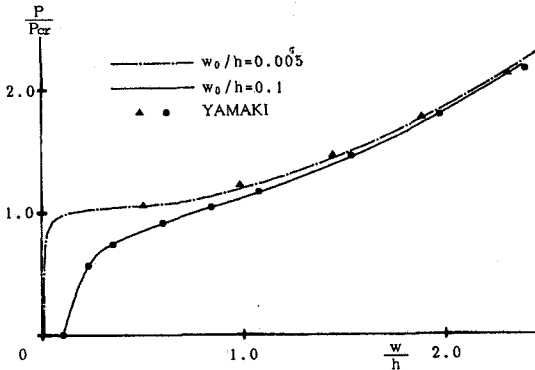


Fig. 2 荷重～たわみ曲線 (Case 1)

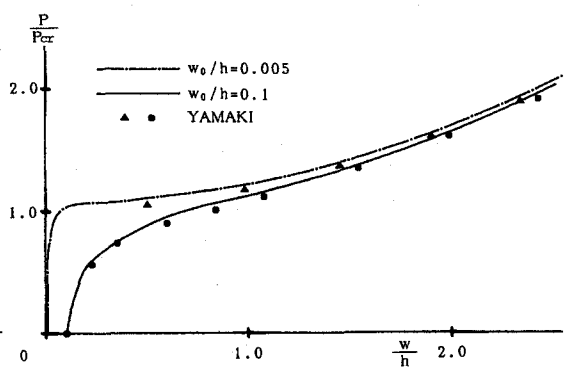


Fig. 3 荷重～たわみ曲線 (Case 2)

[参考文献]

- 1) 崎山毅・松田浩: 変厚矩形板の曲げの一解析法, 土木学会論文報告集, 第338号, pp. 21-28, 1983.
- 2) Yamaki, N.: Postbuckling Behavior of Rectangular Plates With Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, J. of Appl. Mech., Vol. 26, pp. 407-414, 1959.
- 3) 前田幸雄・林正・森寛司: 有限帯板法による薄板の有限変位解析, 土木学会論文報告集, 第316号, pp. 23-36, 1981.