I-8　　回転ベクトルの算法と座標変換

長岡技術科学大学　正員　林　　正

１．まえがき

直交デカルト座標系での座標変換には３次の正規直交行列が用いられているが，方向余弦の性質により，９つの要素のうち独立な要素は３個である．立体骨組の有限変位解析[1]では，回転の合成とこれを記憶するために，正規直交行列である回転行列を用いたが，回転行列は各節点ごとに定義されるので，大規模構造ではかなりの記憶容量が必要になる．一方，回転ベクトルは３成分で表わされるので，記憶容量に関しては効率がよい．しかし，回転ベクトルは通常の極性ベクトルと異なり，回転の向きが定められる軸性ベクトルであるので，通常のベクトル演算則を用いることができない．軸性ベクトルの演算則は線形代数学の書物にも記述されていないので，回転の合成，分解などに必要な計算式や算法について報告する．

２．回転ベクトル

（１）　回転ベクトルの表現式　　右ねじ回りを回転ベクトルの回転の正の向きと定め，その大きさ(回転角)をスカラー量α，回転軸の方向を単位軸性ベクトル$\boldsymbol{\varphi}$で表わすと，回転ベクトル$\boldsymbol{\theta}$の表現式として次のベクトルが考えられる．

$$2\boldsymbol{\varphi}\tan(\alpha/2),\quad 2\boldsymbol{\varphi}\sin(\alpha/2),\quad \boldsymbol{\varphi}\sin\alpha,\quad \alpha\boldsymbol{\varphi}\qquad (|\boldsymbol{\varphi}|=1) \tag{1.a～d}$$

ここで，$\alpha\to0$とすると，これらの回転ベクトルはいずれも微小回転ベクトルに一致する．

本報告では，正接の半角を用いた表現式のみを考え，計算式を簡潔に表わすために係数２を省く．したがって，回転角を算出するときには補正を行うものとする．この回転ベクトル$\boldsymbol{\theta}$を次式のように表わす．

$$\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\varphi}\tan(\alpha/2)=\Phi_i\boldsymbol{e}_i+\Phi_j\boldsymbol{e}_j+\Phi_k\boldsymbol{e}_k,\qquad |\boldsymbol{\theta}|=\tan(\alpha/2),\qquad \Phi_i=\phi_i\tan(\alpha/2)=\tan(\theta_i/2) \tag{2}$$

ここに，$\boldsymbol{e}_i$ は右手直交単位系，ϕ_i はφの方向余弦，θ_i はαによる$\boldsymbol{e}_i$ 軸まわりの回転角である[2]．

（２）　回転行列との変換　　回転ベクトルは回転行列$\boldsymbol{R}$と数学的に等価であり，これらの関係式を示す．

$$\boldsymbol{R}=2\{\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{E}\}/(1+|\boldsymbol{\theta}|^2)-\boldsymbol{E}\ (\alpha\neq n\pi),\quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{E}\ (\alpha=0,2\pi),\quad \boldsymbol{R}=2\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{E}\ (\alpha=\pi) \tag{3.a～c}$$

$$\boldsymbol{\theta}=\{r_{32}-r_{23},\ r_{13}-r_{31},\ r_{21}-r_{12}\}^{T}/(1+\mathrm{tr}\{\boldsymbol{R}\})\quad(\boldsymbol{R}\neq\boldsymbol{R}^{T}),\qquad \boldsymbol{\theta}=\underset{\sim}{\boldsymbol{O}}\quad(\boldsymbol{R}=\boldsymbol{E}) \tag{4.a,b}$$

$$\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\varphi}\tan(\pi/2),\quad \boldsymbol{\varphi}=\{\phi_i,\ r_{ij}/2\phi_i,\ r_{ik}/2\phi_i\}^{T},\quad \phi_i=\sqrt{(1+r_{ii})/2},\quad (r_{ii}\neq-1)\quad (\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{T}\neq\boldsymbol{E}) \tag{4.c}$$

ここに，$\boldsymbol{E}$は３次の単位行列，tr［　］は行列のトレース，｜　｜はノルム，r_{ij} は$\boldsymbol{R}$の(i，j)要素である．$\underset{\sim}{\boldsymbol{O}}$は軸性零ベクトルと定義し，極性零ベクトル$\boldsymbol{O}$と区別する．また，常に次式が成り立つ．

$$(1+|\boldsymbol{\theta}|^2)(1+\mathrm{tr}\{\boldsymbol{R}\})=4,\qquad 1+\mathrm{tr}\{\boldsymbol{R}\}=4\cos^2(\alpha/2) \tag{5.a,b}$$

３．回転ベクトルの算法

（１）　外積(合成)　　２つの回転ベクトル$\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2$ をこの順序で合成した回転ベクトルを$\boldsymbol{\theta}_3$ とする．この回転ベクトルの外積を演算子⊗で表わすと，文献3)の式から次式が得られる．

$$\left.\begin{array}{lll}\boldsymbol{\theta}_2\otimes\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\theta}_3=\boldsymbol{\varphi}\tan(\alpha/2)\equiv\hat{\boldsymbol{\varphi}}/A, & \boldsymbol{\varphi}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}/|\hat{\boldsymbol{\varphi}}|, & \hat{\boldsymbol{\varphi}}=\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{\theta}_2+\boldsymbol{\theta}_2\times\boldsymbol{\theta}_1\\ |\hat{\boldsymbol{\varphi}}|^2=(1+|\boldsymbol{\theta}_1|^2)(1+|\boldsymbol{\theta}_2|^2)-A^2, & A=1-\boldsymbol{\theta}_1\cdot\boldsymbol{\theta}_2 & \\ \tan(\alpha/2)=|\hat{\boldsymbol{\varphi}}|/A\quad(A\neq0), & \alpha=\pi\quad(A=0) & \end{array}\right\} \tag{6.a～g}$$

ここに，(×)は通常のベクトル算法によるベクトル積，(・)はスカラー積である．

$\boldsymbol{\theta}_1$と$\boldsymbol{\theta}_2$の回転軸が等しいとき($\boldsymbol{\varphi}_1=\boldsymbol{\varphi}_2\equiv\boldsymbol{\varphi}$)，$m$を整数として以下の式が求められる．

$$\boldsymbol{\theta}_1\otimes\boldsymbol{\theta}_2=\boldsymbol{\theta}_2\otimes\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\varphi}\tan((\alpha_1+\alpha_2)/2),\quad \boldsymbol{\theta}^{m}=\boldsymbol{\varphi}\tan(m\alpha/2)\equiv\boldsymbol{\theta}/A_m,\quad \boldsymbol{\theta}^{1/m}=\boldsymbol{\varphi}\tan(\alpha/2m) \tag{7.a～c}$$

$$\left.\begin{array}{l}A_2=\dfrac{1}{2}(1-|\boldsymbol{\theta}|^2),\quad A_3=\dfrac{1-3|\boldsymbol{\theta}|^2}{3-|\boldsymbol{\theta}|^2},\quad A_4=\dfrac{1-6|\boldsymbol{\theta}|^2+|\boldsymbol{\theta}|^4}{4(1-|\boldsymbol{\theta}|^2)},\\ A_{1/2}=1\pm\sqrt{1+|\boldsymbol{\theta}|^2},\quad A_{-1}=-1\end{array}\right\}\quad (A_m\neq0) \tag{8}$$

（２） 逆回転ベクトルと分解　式(8)の最後の式は逆回転を表わす．そこで，(　)$^{-1}$を反転記号とすると，式(6)の$\boldsymbol{\theta}_1$に$\boldsymbol{\theta}_1^{-1}$を代入して回転$\boldsymbol{\theta}_2$を回転$\boldsymbol{\theta}_1$と$\boldsymbol{\theta}_3$に分解する式(9)，その他の式が得られる．

$$\boldsymbol{\theta}_2\otimes\boldsymbol{\theta}_1^{-1} = \boldsymbol{\theta}_3 \equiv \hat{\boldsymbol{\varphi}}/A,\quad \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{\theta}_2-\boldsymbol{\theta}_2\times\boldsymbol{\theta}_1,\quad A = 1+\boldsymbol{\theta}_1\cdot\boldsymbol{\theta}_2\ (\neq 0) \tag{9}$$

$$(\boldsymbol{\theta}_2\otimes\boldsymbol{\theta}_1)^{-1} = -(\boldsymbol{\theta}_2\otimes\boldsymbol{\theta}_1) = \boldsymbol{\theta}_1^{-1}\otimes\boldsymbol{\theta}_2^{-1},\quad (\boldsymbol{\theta}_2\otimes\boldsymbol{\theta}_1^{-1})^{-1} = \boldsymbol{\theta}_1\otimes\boldsymbol{\theta}_2^{-1} \tag{10}$$

（３） 零ベクトルと半回転ベクトル　回転角αが零，または2π(全回転)の場合の回転ベクトルを零ベクトル$\underset{\sim}{\boldsymbol{O}}$で表わす．$\underset{\sim}{\boldsymbol{O}}$の回転軸は任意の単位ベクトルで，次式が成り立つ．

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{O}}^{-1} = \underset{\sim}{\boldsymbol{O}},\quad |\underset{\sim}{\boldsymbol{O}}| = 0,\quad \boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\theta}^{-1} = \boldsymbol{\theta}^{-1}\otimes\boldsymbol{\theta} = \underset{\sim}{\boldsymbol{O}},\quad \boldsymbol{\theta}\otimes\underset{\sim}{\boldsymbol{O}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{O}}\otimes\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \tag{11}$$

半回転$\alpha=\pi$を表わすベクトルを$\boldsymbol{\theta}_H$，その回転軸を$\boldsymbol{\varphi}$とすると，以下の式が得られる．

$$\boldsymbol{\theta}_H = T_H\boldsymbol{\varphi}\quad (T_H = \tan(\pi/2)),\qquad \boldsymbol{\theta}_H^{-1} = \boldsymbol{\theta}_H,\qquad \boldsymbol{\theta}_H^2 = \underset{\sim}{\boldsymbol{O}} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\theta}_H = \hat{\boldsymbol{\varphi}}/A,\quad \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\varphi},\quad A = -(\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\theta})\ (A\neq 0),\quad A = \sqrt{1+|\boldsymbol{\theta}|^2}/T_H\ (\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\theta}=0) \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{H2}\otimes\boldsymbol{\theta}_{H1} = \boldsymbol{\varphi}_2\times\boldsymbol{\varphi}_1/A,\qquad A = -\boldsymbol{\varphi}_1\cdot\boldsymbol{\varphi}_2\quad (A\neq 0),\qquad A = 1/T_H\quad (\boldsymbol{\varphi}_1\cdot\boldsymbol{\varphi}_2=0) \tag{14}$$

（４） 異種ベクトルの外積　回転ベクトル$\boldsymbol{\theta}$と極性ベクトル$\boldsymbol{r}$の外積を演算子$\odot$で表わす．式(3)より，

$$\boldsymbol{\theta}\odot\boldsymbol{r} = \{(1-|\boldsymbol{\theta}|^2)\boldsymbol{r}+2(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\theta}+2\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r}\}/(1+|\boldsymbol{\theta}|^2) = \boldsymbol{r}^* \tag{15}$$

ここに，$\boldsymbol{r}^*$は極性ベクトルで，$\boldsymbol{r}^*$は$\boldsymbol{\theta}$によって$\boldsymbol{r}$を回転した線形写像である．さらに，次式が得られる．

$$\boldsymbol{\theta}\odot\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi},\qquad \underset{\sim}{\boldsymbol{O}}\odot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r},\qquad \boldsymbol{\theta}_H\odot\boldsymbol{r} = 2(\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{r} \tag{16}$$

（５） 分配則・交換則　回転ベクトルの計算では，極性ベクトルの分配・交換則が一般に成立しない．

$$(a\boldsymbol{\theta}_1)\otimes\boldsymbol{\theta}_2 = (a\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{\theta}_2+a\boldsymbol{\theta}_1\times\boldsymbol{\theta}_2)/(1-a\boldsymbol{\theta}_1\cdot\boldsymbol{\theta}_2) \tag{17}$$

$$(\boldsymbol{\theta}_1\otimes\boldsymbol{\theta}_2)\otimes\boldsymbol{\theta}_3 = \boldsymbol{\theta}_1\otimes(\boldsymbol{\theta}_2\otimes\boldsymbol{\theta}_3) = \boldsymbol{\theta}_1\otimes\boldsymbol{\theta}_2\otimes\boldsymbol{\theta}_3 \tag{18}$$

$$(\boldsymbol{\theta}_1\times\boldsymbol{\theta}_2)\otimes\boldsymbol{\theta}_3 = (\boldsymbol{\theta}_1\times\boldsymbol{\theta}_2+\boldsymbol{\theta}_3-(\boldsymbol{\theta}_2\cdot\boldsymbol{\theta}_3)\boldsymbol{\theta}_1+(\boldsymbol{\theta}_1\cdot\boldsymbol{\theta}_3)\boldsymbol{\theta}_2)/(1-[\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_2\boldsymbol{\theta}_3]) \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\theta}\odot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2) = (\boldsymbol{\theta}\odot\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{r}_2,\qquad \boldsymbol{\theta}_1\otimes(\boldsymbol{\theta}_2\odot\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{\theta}_1\otimes\boldsymbol{\theta}_2)\odot\boldsymbol{r},$$

$$\boldsymbol{\theta}\odot(a\boldsymbol{r}) = a(\boldsymbol{\theta}\odot\boldsymbol{r}) \tag{20}$$

ここにaはスカラー，［ ］はグラースマンの記号(スカラー三重積)である．また，交換則に関する式は，

$$\boldsymbol{\theta}_1\otimes\boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\theta}_2\otimes\boldsymbol{\theta}_1+2\boldsymbol{\theta}_1\times\boldsymbol{\theta}_2/(1-\boldsymbol{\theta}_1\cdot\boldsymbol{\theta}_2) \tag{21}$$

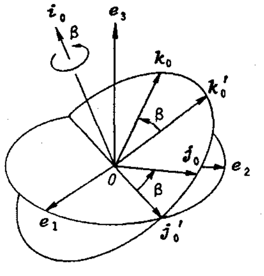
４．座標変換

（１） 方向余弦による表現式　空間骨組部材の部材軸方向の基底ベクトル$\boldsymbol{i}_0$の方向余弦を(l_i, m_i, n_i)とし，断面主軸方向の基底ベクトル$\boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{k}_0$についても同様に定めると，全体座標系に対する回転ベクトル$\boldsymbol{\theta}_0$は式(4.a)より

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0/A,\quad \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0 = \{n_j-m_k,\ l_k-n_i,\ m_i-l_j\}^T,$$

$$A = 1+l_i+m_j+n_k\ (\neq 0) \tag{22}$$

（２） コードアングル　図－１に示すコードアングルβを用いる場合には，$(\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{j}_0', \boldsymbol{k}_0')$による回転ベクトル$\boldsymbol{\theta}_0'$と$\beta$による回転ベクトル$\boldsymbol{\theta}_\beta$から$\boldsymbol{\theta}_0$を求める．



図－１　コードアングル

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\theta}_0'\otimes\boldsymbol{\theta}_\beta = \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0/A,\qquad A = (1+\mu_i)(l_i+\mu_i)-m_in_iT_\beta,\quad \hat{\boldsymbol{\varphi}}_0 = \left\{\begin{array}{c} m_in_i+(1+\mu_i)(l_i+\mu_i)T_\beta \\ -n_i(l_i+\mu_i)+m_i(1+\mu_i)T_\beta \\ m_i(1+\mu_i)+n_i(l_i+\mu_i)T_\beta \end{array}\right\}\ (\mu_i\neq 0),\qquad \mu_i = \sqrt{l_i^2+m_i^2},\quad T_\beta = \tan(\beta/2) \tag{23}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{\theta}_0 = \{T_\beta,\ -n_i,\ n_iT_\beta\}^T & (\beta\neq\pi) \\ \boldsymbol{\theta}_0 = \tan(\pi/2)\{1/\sqrt{2},\ 0,\ n_i/\sqrt{2}\}^T & (\beta=\pi) \end{array}\right\}\quad (\mu_i=0) \tag{24}$$

５．あとがき

以上の式の他に，回転の直交分解や三重積の式，また，式(1)に示した他の表現式を用いた回転ベクトルの計算式などを求めることができる．これらの式を用いて，文献1),2)の回転行列を用いた有限変位解析における座標変換の式を，回転ベクトルで表わすことができる．

1) 前田・林，土木学会論文報告集，No.253，1976，pp.13～27.　2) 前田・林，構造工学論文集，Vol.32A，1986，pp.139～151.　3) 岩崎・林，構造工学論文集，Vol.37A，1991，pp.353～366.