

I-6

厚板理論による長方形厚板の熱応力解析

北見工業大学 正員 奥村 勇

1. まえがき 最近の熱応力問題は、異方性体の定常或非定常問題に関する研究に向いつつあるが、等方性体或は異方性体を問わずに、3次元固体に関する研究が多い。平板の熱応力問題は、薄板に関しては、ほぼ体系づけられている様であるが、厚板に関しては、未だ、十分に研究されていない様である。厚板の場合には、板厚方向の温度変化を線形に仮定できないので、温度場に関する解析が複雑になる。温度場及び応力場共に、厳密な3次元解析が最も望ましい解析方法であるが、3次元固体と異なり、厚板の場合には、数値計算上に困難さを惹起する。その一方、厚板の特性を利用した厚板理論による解析方法があり、簡易性及び適用性の観点から、厚板の熱応力解析に対する有力な手段になっている。

本研究は、表面荷重を受ける長方形厚板の曲げを解析する際に用いた厚板理論と Goodier の熱弾性変位ポテンシャルとを併用して、板の上面に一樣部分温度が課せられた長方形厚板の定常熱応力を解析するものである。温度場に関する境界条件は、3次元熱伝導論により厳密に満足されている。厚板の境界条件は、相対する2辺が単純支持及び他の2辺が自由の場合が考えられている。応力場に関する境界条件のうち、板の上、下面における境界条件は、3次元的に厳密に満足されており、板の周辺における境界条件は、厚板としての境界条件により、近似的に満足されている。

2. 温度場 図-1に示した長方形厚板を解析の対象にすると、定常状態を考えているので、温度 T は、調和関数となり、次式で表される。

$$T = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y (N_r \cosh n_r z + \bar{N}_r \sinh n_r z) \quad (1)$$

ここで、

$$\alpha_r = \frac{r\pi}{a} \quad (r=1, 3, \dots), \quad \beta_s = \frac{2s\pi}{b} \quad (s=0, 1, \dots), \quad n_r = \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_s^2} \quad (2 \cdot a - c)$$

温度場に関する境界条件として、次式を考える。

$$z = h/2 \text{ において、} T = g(x, y) \quad (3 \cdot a)$$

$$z = -h/2 \text{ において、} T = 0 \quad (3 \cdot b)$$

$$x = \pm a/2 \text{ において、} T = 0 \quad (3 \cdot c)$$

$$y = \pm b/2 \text{ において、} \partial T / \partial y = 0 \quad (3 \cdot d)$$

ここで、

$$g(x, y) = \begin{cases} T_0 \quad [|x| < c/2 \text{ かつ } |y| < d/2] \\ 0 \quad [\text{上記以外の場合}] \end{cases} \quad (4)$$

式(3・c)及び式(3・d)の境界条件は、式(2・a, b)により、自明に満足されるので、式(4)を Fourier 級数に展開して、式(1)に式(3・a)及び式(3・b)の境界条件を課すると、 T は、次式の様に定められる。

$$T = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e_{rs}}{2} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y \left(\frac{\cosh n_r z}{\cosh \zeta_{rs}} + \frac{\sinh n_r z}{\sinh \zeta_{rs}} \right) \quad (5)$$

ここで、 $\zeta_{rs} = n_r h/2$ であり、 e_{rs} は、式(4)の Fourier 係数である。

3. 特殊解及び同次解 板の上、下面における境界条件を満足するために、特殊解が必要になるが、熱弾性変位ポテンシャルを付加した次の Boussinesq の解を用いる。

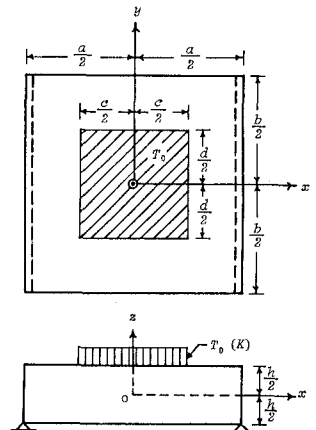


Fig. 1 Rectangular thick plate subjected to surface temperature.

$$2Gu = \text{grad}(\phi_0 + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda}) - 4(1-\nu)\boldsymbol{\lambda} + 2\text{rot}\boldsymbol{\theta} + \text{grad}\chi \quad (6)$$

ここで、

$$\mathbf{u} = [u, v, w], \quad \mathbf{r} = [x, y, z], \quad \boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3],$$

$$\boldsymbol{\theta} = [0, 0, \theta_3], \quad \dots \dots \dots (7 \cdot a - d)$$

$$\nabla^2 \phi_0 = 0, \quad \nabla^2 \boldsymbol{\lambda} = 0, \quad \nabla^2 \boldsymbol{\theta} = 0, \quad \nabla^2 \chi = \alpha ET / (1-\nu) \quad \dots \dots \dots (8 \cdot a - d)$$

また、 G 、 ν 、 α 及び E は、それぞれ、材料のせん断弾性係数、ポアソン比、線膨張係数および弾性係数である。式(8・d)の χ が、Goodierの熱弾性変位ポテンシャルと呼ばれるものであり、式(5)を式(8・d)の右辺に代入して、特殊積分を求めると、次式を得る。

$$\chi = \frac{\alpha E}{4(1-\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_n}{n^2} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \left(\frac{\sinh n r_m z}{\cosh \zeta_{nm}} + \frac{\cosh n r_m z}{\sinh \zeta_{nm}} \right) \quad (9)$$

特殊解のみでは、板の周辺の境界条件を満足できないので、同次解が必要になる。その同次解として、Loveの著書に述べられている平面応力解と一般化平面応力解及び式(6)から誘導される逆対称応力解の三つを用いる。解の具体的な表現については、省略する。

4. 境界条件 図-1に示した長方形厚板の相対する2辺を単純支持、他の2辺を自由及び板の上、下面を自由とする。

5. 計算結果 数値計算例として、辺長比 $b/a=1.0$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 及び温度分布幅 $c/a=d/b=0.3$ の正方形厚板が、種々の板厚比 $e=h/a$ を持つ場合を取扱った。

図-2及び図-3に見る様に、 σ_{xx} は、表面温度の分布境界で著しい不連続性を示し、他方、 σ_{yy} は、ゆるやかに変化する。図-4及び図-5に見る様に、 σ_{xx} 及び σ_{yy} 共に、板厚比の影響が小さく、また、曲げ効果より面内伸縮の効果が大きい。

6. あとがき 表面荷重を受ける長方形厚板の曲げを解析する際のLoveの厚板理論に改良を加えた一厚板理論とGoodierの熱弾性変位ポテンシャルとを併用して、自由辺を持つ長方形厚板の定常熱応力を解析した。本解析方法は、温度場及び板の上、下面に関する境界条件が3次的に厳密に満足されているので、精確性は相当に高いと考える。

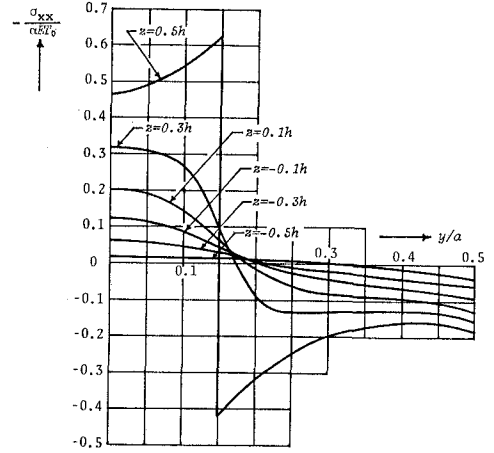


Fig. 2 Distribution of σ_{xx} along y-direction ($x=0, h/a=1/4$).

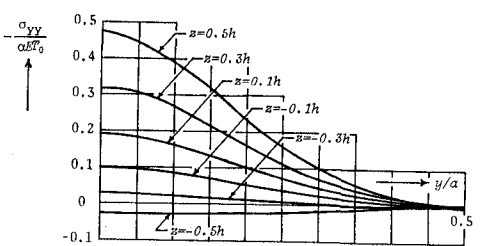


Fig. 3 Distribution of σ_{yy} along y-direction ($x=0, h/a=1/4$).

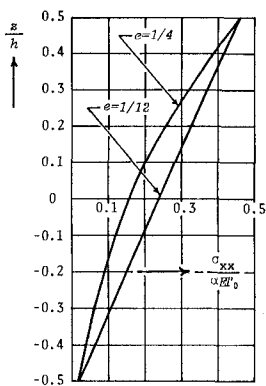


Fig. 4 Distribution of σ_{xx} along z-axis ($x=y=0, e=h/a$).

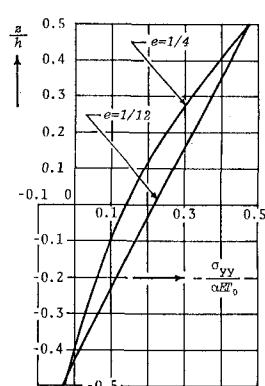


Fig. 5 Distribution of σ_{yy} along z-axis ($x=y=0, e=h/a$).