Ⅰ-3　　はりの連成熱弾性自由振動解析

呉工業高等専門学校　正会員　丸上晴朗
山梨大学　工学部　正会員　平島健一

１．緒言　　はりの自由振動において応力場と温度場の連成を考えた連成熱弾性振動解析では，内部摩擦（内部減衰，材料減衰）のために，これ以外の一切の減衰力を無視しても振動は減衰していく．はりの連成熱弾性振動の理論的研究としては振動の減衰に及ぼす固有円振動数の影響に関する研究[1]，解析的に減衰解を求める研究[2]，その他の諸研究がある．われわれは三種のタイプのはりの連成熱弾性振動方程式を用い，これを満足する変位を$A_m \sin m\pi\bar{x}\exp(i\,\bar{\omega}_m\bar{t})$又は$B_m\cos m\pi\bar{x}\exp(i\,\bar{\omega}_m\bar{t})$の式で仮定して，振動数方程式から$\bar{\omega}_m$　（複素数）を求め（$Re(\bar{\omega}_m)$が固有円振動数を表し$Im(\bar{\omega}_m)$が減衰を表す）この値が解析に用いる連成熱弾性振動方程式の違いによって数値的にどのような差異を示すかについて断片的な数値計算結果をこの学会において発表した[3]．数値計算量が少なくて比較の対象にしたはりの連成熱弾性振動理論間の解析精度等に関する結論が得られていないので，引き続いて数値計算量を増やしてある程度まとまった結論を導くことを目標としている．

２．単純支持ばりの連成熱弾性自由振動解析　　解析方法については前報[3,4]に記述しているので本報では概要だけを示す．解析には三つの基本式を用いる．即ち熱の伝導法則の式，エネルギー方程式（連成熱伝導方程式），連成熱弾性振動方程式の三式を用いる．三番目の式は三つの理論から求まる三種の連成熱弾性振動方程式を用いて解析する．熱伝導法則の式，エネルギー方程式は本質的には常に同一の式を用いるが，具体的な式の形は第三番目の連成熱弾性振動方程式に対応させて少し異なる式を用いる．熱伝導法則の式，エネルギー方程式として一番簡単な場合の式は次式のようになる．熱伝導法則の式：$\gamma_3\,\bar{q}_{\bar{x},\bar{t}}+\bar{q}_{\bar{x}}+\bar{T}^{(1)}_{,\bar{x}}=0$，　$\gamma_3\,\bar{q}_{\bar{z},\bar{t}}+\bar{q}_{\bar{z}}+\bar{T}^{(1)}=0$　……（1）$_{1,2}$

エネルギー方程式：$\bar{b}^2\,\bar{q}_{\bar{x},\bar{x}}-\bar{g}^{(1)}+\bar{T}^{(1)}_{,\bar{t}}-\gamma_1\,\bar{b}^2\,\bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}\bar{t}}=0$　……（2）

連成熱弾性振動方程式の略式名称を記述の単純化のために次のように定める．Bernoulli-Euler の平面保持仮定に基づく古典ばり理論から求めた曲げ振動方程式に温度場の影響を加えた式をC.B.T.E.；Timoshenkoばりの曲げ振動方程式に温度場の影響を加えた式をT.B.T.E.；温度場の影響を加えた高次理論による曲げ振動方程式をH.T.B.E.とそれぞれ略記する．

C.B.T.E.：$2(1+\nu)\,\bar{b}^2\,(\bar{b}^2\,\bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}}+\hat{\alpha}T_0\,\bar{T}^{(1)}_{,\bar{x}\bar{x}})+3\gamma_2\,\bar{w}_{,\bar{t}\bar{t}}=0$　……（3）

T.B.T.E.：$2(1+\nu)\,\bar{b}^2\,(\bar{b}^2\,\bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}}+\hat{\alpha}T_0\,\bar{T}^{(1)}_{,\bar{x}\bar{x}})+3\gamma_2\,\bar{w}_{,\bar{t}\bar{t}}+(\gamma_2^2/\kappa_A)\bar{w}_{,\bar{t}\bar{t}\bar{t}\bar{t}}-2\gamma_2\,\bar{b}^2\cdot(0.5+(1+\nu)/\kappa_A)\cdot\bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}\bar{t}\bar{t}}=0$　……（4）

H.T.B.E.（TYPE1）：$(2+\bar{\lambda})\,\bar{b}^2\,\bar{u}^{(1)}_{\bar{x},\bar{x}\bar{x}}-\gamma_2\,\bar{u}^{(1)}_{\bar{x},\bar{t}\bar{t}}-3(\bar{u}^{(1)}_{\bar{x}}+\bar{b}\,\bar{w}_{,\bar{x}})-\gamma_4\,\bar{b}\,\bar{T}^{(1)}_{,\bar{x}}=0$，

$\bar{b}^2\,\bar{w}_{,\bar{x}\bar{x}}-\gamma_2\,\bar{w}_{,\bar{t}\bar{t}}+\bar{b}\,\bar{u}^{(1)}_{\bar{x},\bar{x}}=0$　……（5），（6）

H.T.B.E.（TYPE2）：$2\bar{b}^2/(1-\nu)\,\bar{u}^{(1)}_{\bar{x},\bar{x}\bar{x}}-\gamma_2\,\bar{u}^{(1)}_{\bar{x},\bar{t}\bar{t}}-3(\bar{u}^{(1)}_{\bar{x}}+\bar{b}\,\bar{w}_{,\bar{x}})-2(1+\nu)/(1-\nu)\,\bar{b}\,\hat{\alpha}T_0\,\bar{T}^{(1)}_{,\bar{x}}=0$　……（7）

この場合（TYPE2)のもう一つの支配式としては式（６）をそのまま用いればよい．即ち式（６）はH.T.B.E.（TYPE1)，H.T.B.E.（TYPE2)共通の支配式になっている．

H.T.B.E.（TYPE1)とは全ての応力成分を仮定した変位　温度場から求めて，連成熱弾性振動方程式を定式化した場合の式であり，H.T.B.E.（TYPE2)とははりの上下両表面上の垂直応力の大きさからはり高さ方向に分布する垂直応力の大きさを仮定によって直接的に求め，この外は全てTYPE1 と同様にして支配式を定式化した場合である．支配式の定式化に二通りの方法を用いたのである．

高次理論では任意の物理量，例えばはりの曲げ変形に寄与する変位のｘ成分（はりの軸方向成分）u_xは

，$u_x = z u_x^{(1)} + z^3 u_x^{(3)} + z^5 u_x^{(5)} + \cdots\cdots$　のように表される．$u_x = z u_x^{(1)}$，$u_x = z u_x^{(1)} + z^3 u_x^{(3)}$ として解析する場合を，それぞれ１－Order 解析，３－Order 解析と言い，式（５），（６），（７）は１－Order 解析の場合の支配式である．３－Order 解析，５－Order 解析では支配式の数はそれぞれ４，６となる．

式（１）～（７）及び単純支持ばりの幾何学的・力学的・熱学的境界条件を満足する解の形は次式のようになる．$\bar{u}_{\bar{x}}^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m} \cos m\pi\bar{x} \exp(i\,\bar{\omega}_m \bar{t})$，$\bar{w} = \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin m\pi\bar{x} \exp(i\,\bar{\omega}_m \bar{t})$，$\bar{q}_x = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{\bar{x}m} \cos m\pi\bar{x} \exp(i\,\bar{\omega}_m \bar{t})$，$\bar{q}_{\bar{z}} = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{\bar{z}m} \sin m\pi\bar{x} \exp(i\,\bar{\omega}_m \bar{t})$，$\bar{T}^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_{1m} \sin m\pi\bar{x} \exp(i\,\bar{\omega}_m \bar{t})$ ……………（８）

式（１），（２），（３）；式（１），（２），（４）；式（１），（２），（５），（６）；式（１），（２），（６），（７）の各組の式へ解（８）を代入してそれぞれの組から振動数方程式を作成しそれぞれの解$\bar{\omega}_m$を，C.B.T.解，T.B.T.解，1-OrderH.T.B.解（TYPE1），1-OrderH.T.B.解（TYPE2）と言うことにする．H.T.B.解については1-Orderだけでなく，3-Order，5-Order等の解も求まる．

３．数値計算例　はり材はAl とした．$\bar{b} \equiv b/l$ でｂははり高さの１／２，ｌははりの支間長である．C.B.T.解は唯１種類の$\bar{\omega}_m$を与える．T.B.T.解，1-OrderH.T.B.解はともに２種類の$\bar{\omega}_m$を与える．3-OrderH.T.B.解，5-OrderH.T.B.解はそれぞれ４，６種類の$\bar{\omega}_m$を与える．現在までの数値計算結果の一部分をTABLE －１に示す．TABLE －１中のENは10^N，E-N は10^{-N}，ｍは式（８）のｍをそれぞれ表す．

TABLE－１

b	m	C.B.T. 解	T.B.T. 解	1-OrderH.T.B.解（TYPE1）	5-OrderH.T.B.解（TYPE1）
0.05	1	0.715E4+i0.189E-3	0.701E4+i0.188E-3	0.903E4+i0.377E-3 0.536E6+i0.140E-4	0.749E4-i0.388E-6 0.484E6-i0.268E-4
	2	0.286E5+i0.757E-3	0.268E5+i0.755E-3	0.340E5+i0.137E-2 0.569E6+i0.196E-3	0.285E5-i0.559E-5 0.508E6-i0.110E-3
0.15	1	0.643E5+i0.171E-2	0.562E5+i0.171E-2	0.703E5+i0.270E-2 0.619E6+i0.823E-3	0.597E5-i0.246E-4 0.544E6-i0.262E-3
	2	0.257E6+i0.682E-2	0.225E6+i0.685E-2	0.210E6+i0.685E-2 0.828E6+i0.723E-2	0.185E6-i0.251E-3 0.692E6-i0.141E-2

４．結言　C.B.T.解，T.B.T.解及び１－OrderH.T.B. 解は減衰解を与えるが，３又は５－OrderH.T.B. 解は発散解を与える．数値計算量を更に増やして高次理論解の特徴及び性質を解明する．

参考文献：１）角，他；はりの連成熱弾性振動と減衰，九大工学集報56巻5 号（1983）．２）Massalas,C.V .et al.;Coupled Thermoelastic Vibrations of a Simply Supported Beam,J.Sound Vib.88（3）(1983)．３）丸上，平島；はりの連成熱弾性振動について，土木学会44回年講,Ｉ－80．４）丸上，平島；非定常熱弾性特性を考慮した平板の高次理論と連成熱振動解析，土木学会41回年講,Ｉ－6.