Ⅰ-1　一様熱流を受ける楕円形剛体介在物の混合境界値問題の一般解

鹿島建設（株）　正員　○入倉英明
名古屋工業大学　正員　長谷部宣男
名古屋工業大学　正員　中村卓次

【はじめに】　一様熱流を受ける無限弾性板中の楕円形剛体介在物(図-１参照)周辺の熱応力解析を混合境界値問題として行う。なお、剛体介在物は熱流を通さないとし、弾性板と全部あるいは一部で剛な接合がされているものとする。これは弾性板中の楕円孔が剛な材料で補強され、一部分が剥離した状態でもある。

熱流が楕円軸に対して斜めに作用する場合、応力分布が非対称となるために剛体介在物は回転する。このことから、図-１のように重ね合わせを考え、それぞれに対する一般解を導く。

(a) 任意の方向から一様熱流が作用し、回転が拘束されている場合（境界条件として接合面では、変位ｕ＝ｖ＝０とすると、境界上に反力モーメントが生じる）
(b) 剛体介在物が偶力モーメントM_0によりεだけ回転する場合
(c) 図-１の(a),(b)を偶力モーメントが零になるように重ね合わせた場合

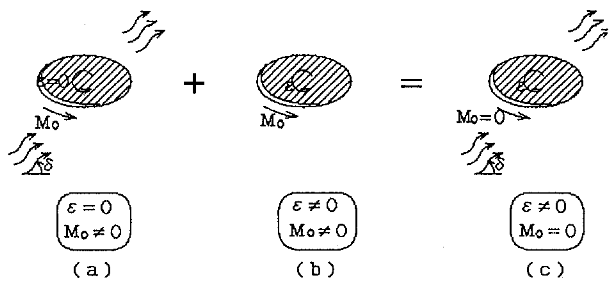

図-１　重ね合わせのモデル

解析は、写像関数とdislocation法により得られる複素応力関数により行う。

【解析モデル】　図-２(ａ)のように剥離を有する無限板中に存在する楕円形剛体介在物を考える。解析に際しては、図-２(ａ)の領域を式①により図-２(ｂ)の単位円外へ等角写像する。

$$z=E_0\zeta+\frac{E_1}{\zeta}\equiv\omega(\zeta) \qquad ①$$

ただし、$E_0=(a+b)/2$，$E_1=(a-b)/2$である。

いま、境界上のｎ箇所で剥離が生じているとして、境界M_i (i=1,2,･･･,n)を接合により変位拘束されている境界、境界L_iを剥離したことにより外力自由となっている境界とし、境界M_iの両端を時針廻りにα_i，β_iとする。

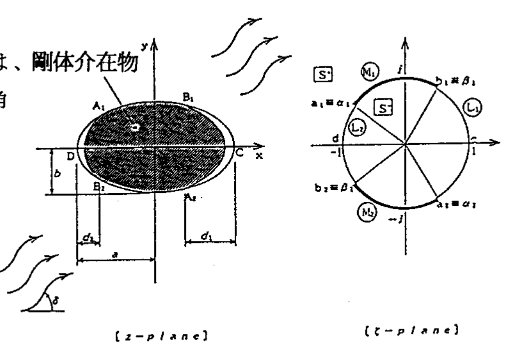

図-２　解析モデルと単位円

【一様熱流に対する一般解】　無限板中の任意点の応力は次式により、単位円外で正則な複素応力関数$\phi(\zeta)$，$\psi(\zeta)$、および有理写像関数$\omega(\zeta)$を用いて求めることが出来る。

$$\sigma_y+\sigma_x=4\,\mathrm{Re}\left[\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right] \qquad \sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\frac{\overline{\omega(\zeta)}\left\{\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right\}'+\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \qquad ②$$

一様熱流を受ける無限板中に存在する孔あるいは介在物の境界条件式は次式で与えられる。

$$\phi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'(\sigma)}+\overline{\psi(\sigma)}=i\int(P_x+iP_y)\,ds+C_j \qquad \text{on } L_j \qquad ③$$

$$\kappa\phi(\sigma)-\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'(\sigma)}-\overline{\psi(\sigma)}=2G(u+iv)-H(\zeta) \qquad \text{on } M_j \qquad ④$$

$$H(\zeta)=2G\alpha_0'\int\Psi(\zeta)\omega'(\zeta)d\zeta \quad \left(\Psi(\zeta)=-\frac{q}{k}\left(E_0\zeta e^{-i\delta}+\frac{\overline{E_0}}{\zeta}e^{i\delta}\right)\right)$$

$H(\zeta)$は一様熱流による項である。境界条件として、$P_x=P_y=0$，$u=v=0$とする。

$\psi(\zeta)$は自由応力境界が存在していることから、解析接続により$\phi(\zeta)$を用いて表すことができる。

dislocationを有する関数

$$\phi(\zeta)=A\log\zeta+\phi_2(\zeta) \qquad \psi(\zeta)=\overline{A}\log\zeta+\psi_2(\zeta) \qquad A=\frac{\alpha_0 q G R}{2k}E_0\left(\overline{E_0}e^{i\delta}-E_1 e^{-i\delta}\right)$$

を導入することにより、$\phi(\zeta)$の解は次の形で得られる。

$$\phi(\zeta)=\chi(\zeta)\left[\frac{\alpha_0 q G R}{2k}\left\{\frac{\overline{E_0}E_1}{2}e^{i\delta}\frac{\chi'(0)\zeta-\chi(0)}{\chi(0)^2\zeta^2}\right\}\right] \tag{5}$$

$$+\frac{C_n}{2\pi i}\chi(\zeta)\int_{L_n}\frac{d\sigma}{\chi(\zeta)(\sigma-\zeta)}+A\log\zeta+\frac{\alpha_0 q G R}{2k}\left\{\frac{E_0^2}{2}e^{-i\delta}\zeta^2+\frac{\overline{E_0}E_1}{2}e^{i\delta}\frac{1}{\zeta^2}\right\}$$

ここで、$\chi(\zeta)$はPlemelj関数であり、

$$\chi(\zeta)=\prod_{j=1}^{n}(\zeta-\alpha_j)^m(\zeta-\beta_j)^{1-m} \tag{6}$$

なる形の関数で、$\zeta\to\infty$のとき$\chi(\zeta)/\zeta\to1$なる分岐をとり、

$$\chi^+(\zeta)=\chi^-(\zeta)\quad \text{on } L,\quad -\kappa\chi^+(\zeta)=\chi^-(\zeta)\quad \text{on } M \quad \left(\begin{array}{ll}\text{平面ひずみ状態} & \kappa=3-4\nu\\ \text{平面応力状態} & \kappa=\frac{3-\nu}{1+\nu}\end{array}\right) \tag{7}$$

なる性質を有する。

定数C_nの値は$\zeta\to\infty$で$\psi(\zeta)$が０になる条件、あるいは、$\zeta\to\infty$で応力が０になる条件を満足するように決定される。

【回転に対する一般解】　境界上で介在物が反時針まわりに角εだけ回転する場合の境界条件式の一般式は、④式で$H(\zeta)=0$とした式と、境界条件として$P_x=P_y=0$，$u+iv=\varepsilon i\omega(\sigma)$を用いて、$\phi(\zeta)$は次式のように得られる。

$$\phi(\zeta)=-\chi(\zeta)\frac{2G\varepsilon i}{1+\kappa}\frac{E_1}{\zeta\chi(0)}+\frac{C_n}{2\pi i}\chi(\zeta)\int_{L_n}\frac{d\sigma}{\chi(\zeta)(\sigma-\zeta)}+\frac{2G\varepsilon i}{1+\kappa}\omega(\zeta) \tag{8}$$

【モーメント】　境界上のｎ個の弧$\alpha_k\beta_k$(k=1,2,････,n)上の力の原点回りの合モーメントM_0は次式で与えられる。

$$M_0=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\left[\int\phi(\zeta)\omega'(\zeta)d\zeta-\omega(\zeta)\phi(\zeta)-\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]_{a_k}^{b_k} \tag{9}$$

⑤式の$\phi(\zeta)$を、$\phi(\zeta)=\chi(\zeta)D(\zeta)+E(\zeta)+B(\zeta)$（$B(\zeta)$は積分の形を含む項）の形で表すと、$M_0$は次のような簡潔な式となる。

$$M_0=-\mathrm{Re}\left[\oint\chi(\sigma)D(\sigma)\overline{\omega'}(1/\sigma)\frac{1}{\sigma^2}d\sigma+\oint B'(\sigma)\overline{\omega}(1/\sigma)d\sigma\right] \tag{10}$$

【解析例】　解析結果の一例として、２カ所で変位拘束された楕円形剛体介在物が一様熱流を受ける場合(図-１(a)の場合)の熱応力分布図を示す。

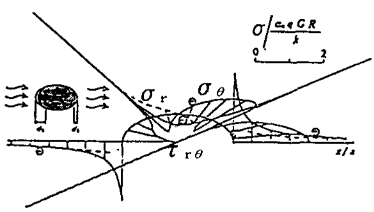

図-３　応力分布（δ＝０°）

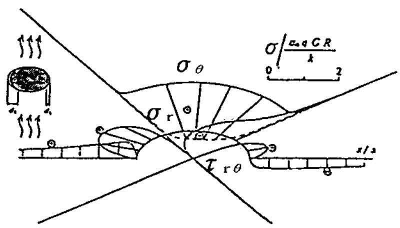

図-４　応力分布（δ＝90°）