

## IV-17

## 作業時間のあいまい推定にもとづく工程計画手法FPERTの提案

九州大学工学部 正員 梶木 武, ○学生員 M.TATISH

九州大学工学部 姜元義, 東急不動産 正員 池田総司

1. まえがき 工程計画の一手法にPERTがあり, 広く用いられているが, 残された課題もある。すなわち, 従来のPERTでは, 作業時間を1点見積り, あるいは3点見積りによっている。しかし, 実際はあいまい推定になることが多い。本研究は, 作業時間のあいまい推定を考慮した工程計画手法を提案する。

2. 従来型PERTの線形計画法による解釈 従来PERTはグラフ上で図式的に解かれるが, これを展開のため線形計画法により解釈すれば次のとおりである。

工事における作業要素 $(i, j)$ の開始日 $S_{ij}$ および完了日 $F_{ij}$ と, これと結びつく節点 $i, j$ の節点日時 $T_i, T_j$ との関係を式で表現すれば,

$$T_i \leq S_{ij}, T_j \geq F_{ij} \quad ((i, j) \in W) \quad \text{①}$$

$$F_{ij} - S_{ij} = t_{ij} \quad ((i, j) \in W) \quad \text{②}$$

および  $T_i \geq 0 (i \in N); F_{ij} \geq 0, S_{ij} \geq 0 ((i, j) \in W)$  ③  
ここに,  $W$ : ネットワーク構成作業要素の集合,  $N$ : 節点集合。また,  $i < j$  となるよう節点番号は付され, 工事開始節点を1, 完了節点を $n$ とする。

従来型PERTの最早プランは, 上記①~③の各式による制約条件のもとで, ネットワーク日数

$$Z = \sum T_i + \sum (S_{ij} + F_{ij}) \quad \text{④}$$

を最小にする問題としてとらえることができる。

他方, PERT最遅プランは, 式①~③と最早プランの工期 $T_n = T^*$ のもとで,  $Z$ を最大にする問題である。

### 3. 作業時間推定のあいまいさの扱いについて

作業時間推定のあいまいさを次の4タイプに分れる。

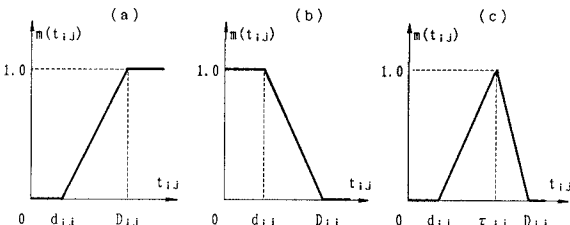


図1 作業時間のメンバーシップ関数

(1)タイプ1 本タイプは, 従来のように作業時間が1点見積り $t_{ij} = \tau_{ij}$ としてえられるものである。

(2)タイプ2 「 $t_{ij}$ は最低限 $d_{ij}$ 必要であると考えられるものの,  $D_{ij}$ とすれば間違いないところであ

う」といった内容である。メンバーシップ関数を直線式で仮定すれば(図1(a)), 上述の内容は,

$$1 - \frac{D_{ij} - t_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}} \geq \lambda \quad \text{⑤}$$

において,  $\lambda$ の値をできる限り大きくすること( $t_{ij}$ をできる限り $D_{ij}$ に近づけること)と解釈できる。

(3)タイプ3 「 $t_{ij}$ はできる限り $d_{ij}$ であることが望まれるが, 遅れても $D_{ij}$ までである」といった内容である。タイプ2と同様に考察すれば(図1(b)),

$$1 - \frac{t_{ij} - d_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}} \geq \lambda \quad \text{⑥}$$

において $\lambda$ を極力大きくすることである。ただし,

$$t_{ij} \geq d_{ij} \quad \text{⑦}$$

(4)タイプ4 「 $t_{ij}$ はできる限り $\tau_{ij}$ であることが望まれるが, いくら急いでも $d_{ij}$ までであり, あるいは逆に遅れても $D_{ij}$ までである」という内容である。これはあいまいさの概念でいえばタイプ2と3の複合形であり, 次式で与えられる(図1(c))。

$$1 - \frac{\tau_{ij} - t_{ij}}{\tau_{ij} - d_{ij}} \geq \lambda, \text{ または} \quad \text{⑧}$$

$$1 - \frac{t_{ij} - \tau_{ij}}{D_{ij} - \tau_{ij}} \geq \lambda \text{ かつ } t_{ij} \geq \tau_{ij}$$

4. FPERTモデル 作業時間推定のあいまいさを含むネットワークでは, 従来PERTにおける未知量 $T_i, F_{ij}, S_{ij}$ に加え $t_{ij}$ をも未知量とすることである。

(1)FPERT最早プラン 本題の目的関数は, 基本的には式④の $Z$ を最小にすることである。しかし, この他にも $Z_0 = \lambda$ を極力大きくすることが求められ, 2目的問題となる。この処理として,  $Z$ を最小にするという考えをゆるめて妥協を図ることが考えられる。すなわち,  $Z$ の最小値, 最大値を $Z_1, Z_0$ とすれば,

$$1 - \frac{Z - Z_1}{Z_0 - Z_1} \geq \lambda \quad \text{⑨}$$

において,  $\lambda$ をできる限り大きくすることである。

以上から, FPERT最早プランの数学モデルは,

$$\text{Maximize } Z_0 = \lambda$$

$$\text{subject to } T_i = 0, T_i \leq S_{ij}, T_j \geq F_{ij} ((i, j) \in W)$$

$$F_{ij} - S_{ij} = t_{ij} \quad (\text{タイプ1})$$

$$1 - \frac{D_{ij} - F_{ij} + S_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}} \geq \lambda \quad (\text{タイプ2})$$

$$1 - \frac{F_{ij} - S_{ij} - d_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}} \geq \lambda, \quad F_{ij} - S_{ij} \geq d_{ij} \quad (\text{タイプ3})$$

$$1 - \frac{\tau_{ij} - F_{ij} + S_{ij}}{\tau_{ij} - d_{ij}} \geq \lambda, \quad \text{または}$$

$$1 - \frac{F_{ij} - S_{ij} - \tau_{ij}}{D_{ij} - \tau_{ij}} \geq \lambda \quad \text{かつ} \quad t_{ij} \geq \tau_{ij} \quad (\text{タイプ4})$$

$$1 - \frac{\sum T_i + \sum (S_{ij} + F_{ij}) - Z_i}{Z_u - Z_i} \geq \lambda$$

and  $S_{ij} \geq 0, F_{ij} \geq 0 ((i, j) \in W); \lambda \geq 0$

$$T_i \geq 0 (i \in N) \quad \dots\dots\dots ⑩$$

(2)FPERT最速プラン  $T_n = T^*$ のもとで $Z$ を出来る限り大きくすることを考えれば、上述と同様に最速プランの数学モデルがえられる。

| job   | type | $d_{ij}$ | $\tau_{ij}$ | $D_{ij}$ | job    | type | $d_{ij}$ | $\tau_{ij}$ | $D_{ij}$ |
|-------|------|----------|-------------|----------|--------|------|----------|-------------|----------|
| 1, 2  | 1    |          | 10          |          | 6, 8   | 2    | 3        |             | 7        |
| 1, 3  | 2    | 25       | 35          |          | 6, 9   | 2    | 8        |             | 15       |
| 2, 4  | 3    | 2        | 7           |          | 7, 9   | 4    | 10       | 14          | 17       |
| 2, 5  | 1    |          | 20          |          | 7, 10  | 2    | 5        |             | 8        |
| 3, 4  | 1    |          | 0           |          | 8, 9   | 1    |          | 4           |          |
| 3, 6  | 3    | 9        | 15          |          | 9, 11  | 2    | 6        |             | 13       |
| 4, 7  | 3    | 15       | 24          |          | 10, 11 | 3    | 7        |             | 9        |
| 5, 10 | 4    | 14       | 16          | 21       | 11, 12 | 1    |          | 6           |          |

(day)

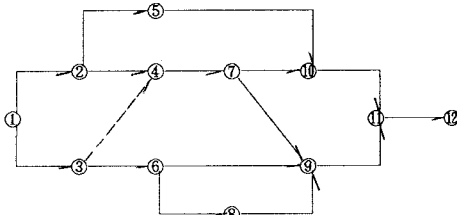


図2. 計算例

5. 適用例 図2に示す例題に関し、FPERTを適用する。式⑩にもとづくFPERT最早プランの数学モデルを作成し、シンプレックス法を適用すれば図3(a)をうる。一方、最速プランは、 $T_{12}=77.11$ として解けば $T_1=2.49, \lambda^*=0.60$ である。この解では $T_1$ が必ずしも0でなく、 $\lambda^*$ も最早プランのそれより小さい。 $T_1=0$ を満足させつつ $\lambda^*$ をより大きくするには、 $Z_u$ をより小さい値にして妥協を図ればよく、 $Z_u=2568$ から試行錯誤的に計算を繰返せば、 $Z_u=2338.6$ のとき図3(b)をうる。また、このとき $\lambda^*=0.72$ となり、最早プランのそれに一致し、 $t_{ij}$ も同じ値になる。なお、この事実から、最速プランをわざわざFPERTで解くまでもなく、最早プランの $t_{ij}$ を用いて従来型PERT最速プランの計算法を適用すればよい。

6. 実行可能性を考慮したFPERT  $\lambda^*$ の値はいまいさの度合であるが、見方を変えれば $\lambda^*$ が大きいほどその計画の実行可能性が大きいといえる。した

がって、積極的に $\lambda^*$ がある値以上になるように計画を立案することである。 $\lambda^*$ の操作は式⑨の $Z_L, Z_u$ の値の変化により行いうる。すなわち、図4は上記の例に関し $Z_L, Z_u$ の値を変化させたときの $\lambda^*$ の変化をプロットしたものである。これより、 $\lambda^*$ をコントロールするFPERTシステムを提案すれば図5の通りである。

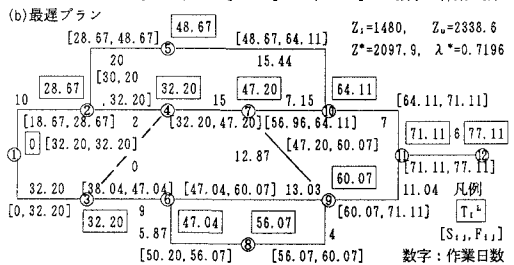
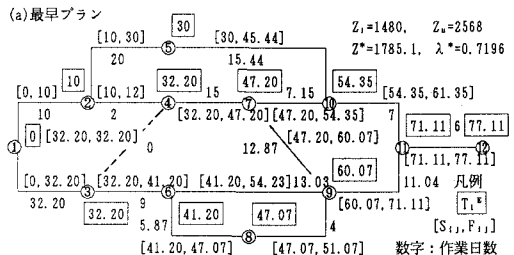


図3 最早プランと最速プラン

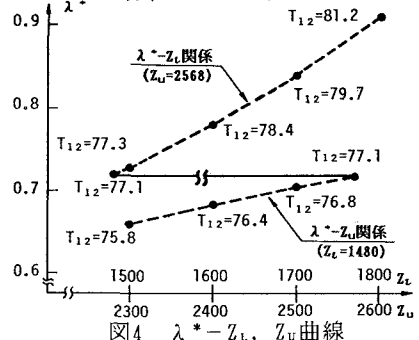


図4  $\lambda^* - Z_L, Z_u$  曲線

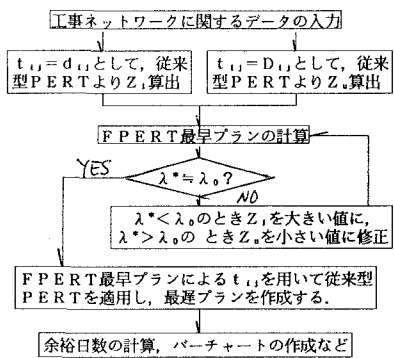


図5 FPERTシステム