

III-443 地下水挙動の確率論的な予測解析

東京電力(株) 正会員 西脇芳文

前田建設工業(株) 正会員 梨本裕 松井幹雄 相木克介

1. はじめに

地下水の挙動は地盤の透水係数に支配される。透水係数のバラツキは地盤にもよるが相当大きく、地下水挙動の予測解析においてはこのバラツキを考慮する必要がある。その予測解析の手段としてモンテカルロ法の適用が有効であるが、数多くの解析を必要とする。そこで、浸透流FEM解析に線形一次近似理論を適用し、計算効率の向上を図った。

2. 線形一次近似理論の浸透流FEM解析への適用

飽和・不飽和定常浸透流問題の支配方程式はFEMにおいて次式で表される。

$$[K] \{h\} = \{q\} \cdots (1)$$

$[K]$: 浸透マトリックス, $\{h\}$: 節点全水頭ベクトル, $\{q\}$: 節点流量ベクトル

ここで、 $[K]$ および $\{q\}$ が m 個の不確定要因 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m\} = \{\alpha\}$ の関数であるとすれば、 $\{h\}$ も $\{\alpha\}$ の関数となる。ただし、すべての α の期待値は0とする。

$$h_i = h_i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m) = h_i(\alpha) \cdots (2) \quad h_i : \text{節点 } i \text{ の全水頭}$$

h_i を α についてマクローリン展開し、二次以上の高次の項を無視すれば次式が得られる。

$$h_i = h_i(0) + \sum \alpha_m \partial h_i / \partial \alpha_m(0) \cdots (3)$$

$h_i(0)$, $\partial h_i / \partial \alpha_m(0) : h_i$, $\partial h_i / \partial \alpha_m$ の $\{\alpha\} = \{0, 0, \cdots 0\}$ における値従って、 h_i の期待値と分散は次式で与えられる。

$$E[h_i] = h_i(0) \cdots (4) \quad \text{Var}[h_i] = \sum (\partial h_i / \partial \alpha_m(0))^2 \text{Var}[\alpha_m] \cdots (5)$$

h_i 以外の q_i (節点 i の流量)、 v_e (要素 e の流速) などと同様に与えられる。

3. 期待値と分散の具体的な計算手法

h_i などの期待値は、(4) 式から明らかなように、 $\{\alpha\} = \{0, 0, \cdots 0\}$ のときの通常のFEM解析結果として算出される。

一方、 h_i の分散は、次の手順で算出する。

① (1) 式を α_m で偏微分して (6) 式を得る。

$$\partial [K] / \partial \alpha_m \{h\} + [K] \partial \{h\} / \partial \alpha_m = \partial \{q\} / \partial \alpha_m \cdots (6)$$

② 与えられた境界条件と次の条件の下で (6) 式を解く。

水頭固定境界: $\partial h_i / \partial \alpha_m(0) = 0$, 領域内部: $q_i(0) = 0$, $\partial q_i / \partial \alpha_m(0) = 0$

流量固定境界: $\partial q_i / \partial \alpha_m(0) = 0$

③ 得られた $\partial h_i / \partial \alpha_m(0)$ を (5) 式に代入する。

同様に $\partial q_i / \partial \alpha_m(0)$ 、 $\partial v_e / \partial \alpha_m(0)$ を求めることにより、 q_i 、 v_e の分散も算出できる。

4. 透水係数のバラツキの表現

透水係数 K は (7) 式で表されるものとし、次の仮定を設ける。

$$K_x = R_x \cdot K_{\text{sat}} \cdot r \quad K_y = R_y \cdot K_{\text{sat}} \cdot r \cdots (7)$$

K_x , K_y : 主透水係数, K_{sat} : 飽和時の透水係数,

R_x , R_y : 異方性パラメータ, r : 比透水係数 (不飽和/飽和) パラメータ

① 主透水方向と R_x , R_y は確定している。 ② r は圧力水頭 ϕ の関数として確定的に与えられる。

さらに、飽和時の透水係数が次式で表されるものとする。

$$K_{\text{sat}} = \bar{K}_{\text{sat}} \cdot \beta \cdots (8) \quad \bar{K}_{\text{sat}} : \text{基準飽和透水係数}, \beta : \text{確率変数 } \alpha \text{ の関数 (無次元値)}$$

これらは、 K_{sat} が正規分布に従うとき (9)～(11)式、 K_{sat} が対数正規分布に従うとき(12)～(14)式で定義される。

$$\bar{K}_{sat} = E [K_{sat}] \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\bar{K}_{sat} = \exp (E [\ln K_{sat}]) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\beta = 1 + \alpha \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\beta = \exp \alpha \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\alpha = (K_{sat} - E [K_{sat}]) / E [K_{sat}] \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\alpha = \ln K_{sat} - E [\ln K_{sat}] \quad \dots\dots\dots (14)$$

K_{sat} が正規分布と対数正規分布のどちらに従う場合でも、 $\alpha = 0$ のとき $\beta = 1$ 、 $\partial \beta / \partial \alpha = 1$ となるので、線形一次近似理論の適用においては、正規分布と対数正規分布を区別せずに計算できることになる。

5. 解析例

線形一次近似理論を適用した浸透流FEM解析（以後LFEMと称する）の有用性を検討するために、モンテカルロ法を適用した浸透流FEM解析（以後MFEMと称する）と比較した。図-1に解析モデルを示す。これは東京の土丹層（④～⑧）におけるトンネル掘削を想定したもので、覆工の止水効果は無視している。各地層の透水係数の平均値は図-1の中に示す通りとした。ただし、トンネル周辺の地層（④～⑦）透水係数だけが変動係数（標準偏差／平均値）0.5のバラツキを持ち、対数正規分布に従うものとした。また、これらの地層間の相関性については完全相関の場合(Case A)と完全独立(Case B)の場合を考慮した。

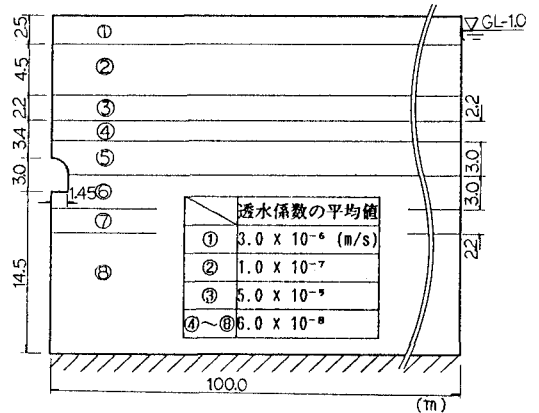


図-1 解析モデル

トンネルへの地下水流入量に関する解析結果を表-1に示す。透水係数の変動係数が0.5であるのに対し、流入量のそれは完全相関の場合0.41～0.40、完全独立の場合0.23と、地層間の相関性の無さが予測の幅を大きく絞り込む結果になっている。このような予測の基本データを得る事前調査においては、地層間の相関性の把握も重要であることが分かる。

表-1 トンネルへの流入量 ($\times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$)

	LFEM		MFEM	
	Case A	Case B	Case A	Case B
期待値	1.1	1.1	1.2	1.1
標準偏差	0.46	0.26	0.49	0.26
変動係数	0.41	0.23	0.40	0.23

また、両解析結果の差は10%以下で良く一致している。しかも、図-2に示すようにMFEMで正解を出力するためには100～400回以上の計算が必要である。これらのことからLFEMの計算効率の良さが分かる。

6. おわりに

上記の解析結果により線形一次近似理論を適用した浸透流確率FEMおよび今回開発した解析プログラムの有用性が確認できた。今後の発展が期待できる。

なお、本研究に有益なご指導をいただいた星谷勝武蔵工業大学教授に謝意を表します。

参考文献

- 1) 西脇芳文、山崎剛：都市域のNATMトンネルの挙動解析手法について，第18回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集
- 2) 桜井春輔、土居康成：有限要素法による斜面の信頼性解析，土木学会論文報告集，No. 330，1983.
- 3) 赤井浩一、大西有三、西垣誠：有限要素法による飽和-不飽和浸透流の解析，土木学会論文報告集，No. 264，1977.

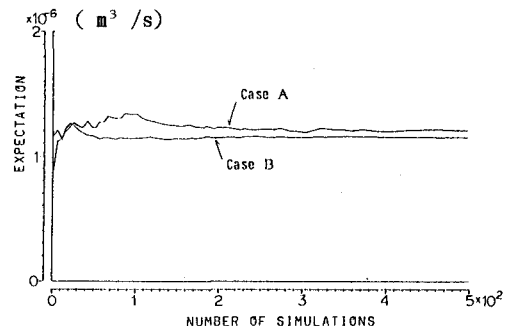


図-2 MFEMによる期待値の収束状況