土木学会第45回年次学術講演会（平成２年９月）

III-418　分割法・円弧すべり解析の力学的考察

名古屋大学工学部　正　大塚　　悟

1．はじめに

地盤の安定性評価は一般に分割法による円弧すべり安定解析によって行われることが多い。しかし、分割法・円弧すべり法は力の釣り合い式を解く一方で最もクリティカルな破壊形状（すべり線）を探索するなど、応力場と変位速度場の両者を同時に解く方法であり、従来、得られた解の力学的な意味はそれほど明らかにされていない。

本研究では塑性定理（上界計算）を用いて分割法・円弧すべり安定解析法の力学的考察を試みた。

2．最大塑性仕事の原理、上界定理と最小化計算

最大塑性仕事の原理に基づく塑性定理に上・下界定理がある。２つの定理は双対関係にあり、上界定理は任意の運動学的可容速度場において、

［外力仕事率］＝［内部エネルギー消散率］　(1)

を解いて得られる解が真値を下回らないことを保証する。そのために設定した速度場の数だけ上界値が計算され、これらの最小化計算によって真値に最も近い上界値を求めることが可能になる。上界定理では力の釣り合い式を全く取り扱わないが、田村ら(1984)に指摘されるように、最小化計算による局値では式(1)が極限状態の力の釣り合い式（弱形式）に等価となる重要な性質がある。

3．内部エネルギー消散率の性質

地盤を $c\phi$ 材料と見做して、応力～ひずみ速度関係を Mohr-Coulomb 型の降伏関数に基づく関連流れ則によって記述すると、すべり線（図1）に沿うエネルギー消散率 D は次のように、

$$D = \tau\dot{u} - \sigma\dot{u}\tan\phi = c\dot{u} \qquad (2)$$

と表される。他方、地盤の応力～ひずみ速度関係に体積ひずみ速度成分のない Mises 型の降伏関数を用いると、すべり線上のエネルギー消散率は次式になる。

$$D = \tau\dot{u} = (c + \sigma\tan\phi)\dot{u} \qquad (3)$$

Mises 型の降伏関数の場合には変位速度 $\dot{u}$ に対応する応力は不定であるが、上式では Mises 強度定数が力の釣り合い式を満足する垂直応力 σ によって記述されることに注意する。

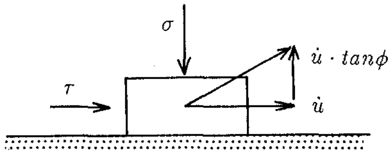

図１　すべり線上の応力～ひずみ速度関係

4．分割法による円弧すべり計算

上界定理を用いて図2の斜面安定問題の定式化を行う。すべり線は円弧を仮定し、円弧の中心位置および半径 R を操作する。円弧によるすべり線は運動学的に可容である。そこで全体を n 個の帯片に分割し、各帯片を剛体と仮定すると、上界計算式(1)は中心周りの角回転速度 $\dot{\theta}$ を用いて

$$\sum_i \tau_i R\dot{\theta} = \rho\sum_i W_i R\sin\alpha_i\dot{\theta} \qquad (4)$$

と表される（W_i および τ_i は各帯片の自重およびすべり線上のせん断応力）。ρ は物体力に関する load factor で安全率に対応する。

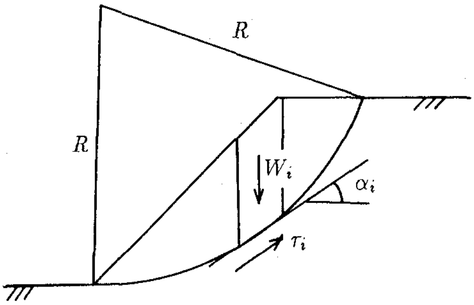

図２　円弧すべりと分割法

したがって、上界計算は円弧の中心位置および半径を操作して式(4)から得られる ρ（安全率）を最小化することに帰着する。上界計算式(4)は ρ（安全

率）の最小値において円弧の中心周りのモーメントの釣り合い式（の弱形式）に等価になる。

これに Mises 型の応力～ひずみ速度関係を用いると、式(4) の左辺は式(3) と同形式になって各帯片のすべり線での垂直応力 σ_i が未知数となる。したがって $\phi = 0$ の地盤に対して上界計算を行うには、次の力の釣り合い式を用いなければ問題（図2）の安全率を算定することができない。

$$\tau_i = (Wi + \Delta V_i)\, sin\alpha_i + \Delta E_i\, cos\alpha_i \qquad (5)$$

$$N_i = (Wi + \Delta V_i)\, cos\alpha_i - \Delta E_i\, sin\alpha_i \qquad (6)$$

ここに式(5)、(6) は各帯片の鉛直・水平方向の力の釣り合い式を表す（式中の記号は図3に示し、$\Delta_i = (\ )_{i+1} - (\ )_i$ とする)。

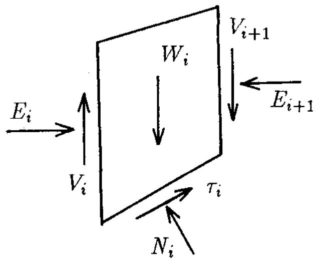

図3　帯片に作用する力

安全率を強度に対して定義すると、

$$\tau_i = (\ c + \sigma_i\, tan\phi\ )\ /\ Fs \qquad (7)$$

式(4)～(7) による上界計算は分割法による円弧すべり解析の方程式群と全く一致することが分る。したがって分割法・円弧すべり解析は地盤が限界状態で体積ひずみを生じないと仮定する上界計算の1手法であり、安全率を最小化した時に式(4)～(6) は力の釣り合い式を表す連立方程式（$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{o},\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$）になっている。

5．非円弧すべり法の力学的考察

円弧すべり法と同様に、図4の非円弧すべりに対して上界定理を適用する。水平方向の変位速度 $\dot{u}$ を用ると上界計算式(1) は次式になる。

$$\sum_i \tau_i \frac{\dot{u}}{cos\alpha_i} + \sum_j V_j\, \Delta tan\alpha_j\, \dot{u} = \sum_i W_i\, \dot{u}\, tan\alpha_i \qquad (8)$$

上式の左辺第2項は帯片間の変位速度の不連続量に基づくエネルギー消散率であるが、次のように変形することができる。

$$\sum_j V_j\, \Delta tan\alpha_j\, \dot{u} = -\sum_i \Delta V_i\, \dot{u}\, tan\alpha_i \qquad (9)$$

したがって、式(8) は次式となる。

$$\sum_i \tau_i \frac{\dot{u}}{cos\alpha_i} = \sum_i (\ W_i + \Delta V_i\ )\, \dot{u}\, tan\alpha_i \qquad (10)$$

式(7)、(10) による上界値の最小化演算（この場合には τ_i 中の Fs を最小化する）を行うと、円弧すべり法と同様に式(5)、(6)、(10) は力の釣り合いを表す連立方程式に帰着する（簡単のために、境界での外力 = 0 とした）。

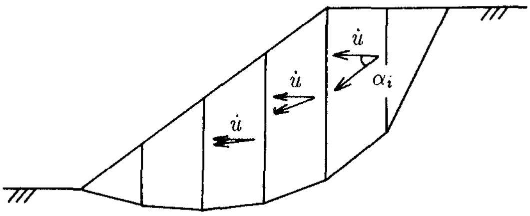

図4　運動学的に可容な非円弧すべり変位速度場

式(5)～(8) による上界計算は Janbu による非円弧すべり法の方程式群と全く同様である。未知数の数に対して場の方程式の不足を補ういわゆる［静定化条件］に、上界定理に基づいて場の強度式を用いると未知数と場の方程式の数が一致し、問題を解くことができる。非円弧すべり法による式(8) または(10) と円弧すべり法による式(4) との差異は設定した帯片間での強度式が陽に現れるか否かにある。

有益なご指摘を戴きました名古屋大学、浅岡顕教授に感謝致します。

参考文献

(1) Tamura,T., Kobayashi,S. and Sumi,T.(1984): "Limit analysis of soil structure by rigid plastic finite element method," Soils and Foundations, Vol.24, No.1, pp.34-42.

(2) 山口柏樹(1985):土質力学（全改訂）、技報堂.