土木学会第45回年次学術講演会（平成２年９月）

III-349　砂の非共軸な構成モデル：修正二重すべりモデル

八戸工業大学土木工学科（正）　飛田　善雄

《はじめに》地盤材料は破壊近傍になると、すべり帯に代表される様に、それまでとは全く異なる変形を示すことが多い。最近、このすべり帯の発生と進展を論ずる研究が注目を集めている。解析的に、妥当な精度で、すべり帯の発生を予測するためには、非共軸性を示す構成モデルを考慮することが必要になる。　非共軸性とは、物体の変形を弾塑性体として把えた時、塑性ひずみ速度の主軸方向が応力の主軸と一致しない性質を意味している。従来、我々は等方体を前提とする共軸な構成モデルに親しんでいるために、「非共軸性な構成モデル」に違和感を覚え易いが、むしろ、物性的観点からは、元来非共軸性をしめすはずの物体が、特殊な条件（例えば、通常の三軸圧縮試験など）のもとで、共軸性を示すと考えた方が自然である。

《非共軸性の物理的背景》

「なぜ、砂のような粒状体の場合に、非共軸性が生ずるのか？その基本的なメカニズムは何か？」の問いに正確に答えることは難しい。しかし、「砂の場合には、一般に異方性を示す」ことを認めれば、異方性を表現する２階のテンソル（ファブリックテンソル）の主軸と応力の主軸が一致しない場合には、一般には、非共軸性を示すことが証明できる。

又、金属材料に対して、盛んに議論されてきたように、すべりのような微視的変形メカニズムが塑性変形と共に、ある方向に卓越して生ずるようになれば、非共軸性を示すことになる。

以上二つのメカニズムのうち、いずれが支配的な要因であるかを、物性論的に、議論することは現時点では難しいものと思われる。本文では、すべりの変形メカニズムを考慮した砂の二重すべりモデル（物体そのものは、等方体である）に異方性の影響を加味した修正モデルを提案し、砂の実験事実のうち、次の２点が説明できることを示す。

（１）応力主軸と構造の主軸が一致しない場合には応力の主軸方向が一定であっても、非共軸性を示す。

（２）応力主軸の回転のみが生ずる場合でも、塑性的な変形が卓越し、非共軸性を示し且つダイレイタンシーも生ずる。

《二重すべりモデル》（Anand, Nemat-Nasser、飛田 他 に詳しい）簡単のために、平面的な変形（２次元）を考える。以下、塑性変形のみを考え、pを省略する。砂の様な粒状体の塑性変形の主要なメカニズムがあるすべり面に沿って生ずるすべり変形であるとする。さらにこのすべり面は、最大圧縮方向と（$\pi/4-\xi/2$）をなす応力の主軸に関して対称な２つのすべり面(a),(b)で代表できると考える（図１参照）。このすべり面で、せん断ひずみ速度$\dot{\gamma}^{(i)}$、すべり面に垂直なダイレイタンシー速度$\dot{v}^{(i)}$（$=\tan\nu\,\dot{\gamma}^{(i)}$）をもつ単純せん断変形が生じるものとする。この条件のもとで、主応力軸を座標系（直交デカルト座標系）に選んだ場合の、塑性ひずみ速度は次の様に記すことができる。

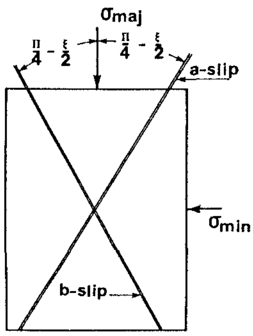

図１：二重すべりモデル

$$d_1=(\cos(\xi-\nu)/\cos\nu)(\dot{\gamma}^{(a)}+\dot{\gamma}^{(b)})$$
$$d_2=(\sin(\xi-\nu)/\cos\nu)(\dot{\gamma}^{(a)}-\dot{\gamma}^{(b)}) \qquad (1)$$
$$\dot{v}(=d_3)=-\tan\nu(\dot{\gamma}^{(a)}+\dot{\gamma}^{(b)})$$

ここに、

$$d_1=D_{11}-D_{22},\quad d_2=2D_{12},\quad v(=d_3)=-(D_{11}+D_{22}) \qquad (2)$$

(2)式に対応する応力として、

$$Q_1=(\sigma_{11}+\sigma_{22})/2,\qquad Q_2=\sigma_{12}, \qquad (3)$$
$$P(=Q_3)=-(\sigma_{11}+\sigma_{22})/2$$

を定義する。ここでは、引っ張りを正にしている。これらの量は、３次元的に表現することが可能であり、しかも直交性を有する。非共軸性を論ずる場合は、Q_1, Q_2の偏差応力面での表現が便利である（図２

参照）。この様に定義される量は、$\sigma_{ij}D_{ij}=Q_k d_k$の等値性を持つ。

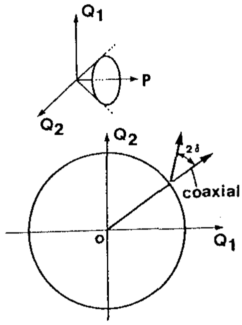

図２：Q_i による二次元応力の表現

(1)式より解るように、主応力座標系で$\dot{\gamma}^{(a)}\neq\dot{\gamma}^{(b)}$であれば、$d_2\neq0$であり、一般には、非共軸性を示すことになる。通常の二重すべりモデルでは、「なぜ、せん断ひずみ速度が異なるのか」は具体的には示されていない。そこで、各々のすべり面に対して独立に（同じ関数形の）降伏条件 $f^{(i)}$を仮定し、これが異方性に影響される様な定式化を行う。

《異方性の導入》

$f^{(i)}$の具体的な形として

$$f^{(i)}=\tau^{(i)}-\mu\sigma^{(i)}=0 \qquad i=a,b \tag{4}$$

ここに、$\tau^{(i)}=\underset{\sim}{s}\cdot\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{n}$　$\sigma^{(i)}=-\underset{\sim}{n}\cdot\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{n}$ である。

$\underset{\sim}{s}$ はすべり方向の単位ベクトル、$\underset{\sim}{n}$ はすべり面の法線ベクトルである。$\underset{\sim}{T}$ は修正応力と呼ばれているもので、異方性に関する情報を含んだ形で定義された応力である。$\underset{\sim}{T}$ を用いることにより、降伏曲面の形状変化を含む多様な硬化特性が表現できる（Tobita & Yanagisawa(1990)）.ここでは、$\underset{\sim}{T}$ として、

$$\underset{\sim}{T}=(\underset{\sim}{\sigma}\underset{\sim}{H}+\underset{\sim}{H}\underset{\sim}{\sigma})/2 \tag{5}$$

の形の修正応力を考える。ここに$\underset{\sim}{H}$は、砂の内部構造の異方性を特徴付けるファブリックテンソルである。通常の塑性論のように、$\dot{\gamma}^{(i)}$の大きさは、$\hat{f}^{(i)}=(\partial f^{(i)}/\partial\underset{\sim}{\sigma})\cdot\dot{\underset{\sim}{\sigma}}$ (>0 の時のみ塑性変形が発生する（負荷）。：$\hat{f}^{(i)}<0$の場合には弾性変形のみが生ずる（除荷））に比例するものと考える。

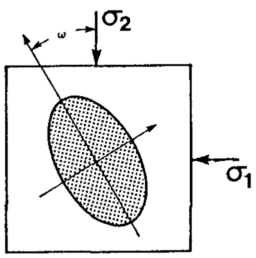

図３：構造および応力の関係（主軸の方向で２ωだけずれ

いま、応力の主軸とファブリックテンソルの主軸がωだけずれているものとして（図３参照）、(5)式を(4)式に代入して、$\hat{f}^{(i)}$を求めると、次の様な表現を得る。

$$\hat{f}^{(i)}=\{\underset{\sim}{m}^{(i)}\}\ [\underset{\sim}{L}]\ \{\dot{\underset{\sim}{Q}}\} \tag{6}$$

ここに、

$$\underset{\sim}{m}^{(a)}=\{\cos\xi+\mu\sin\xi,\ \sin\xi-\mu\cos\xi,-\mu\} \tag{7}$$

$$\underset{\sim}{m}^{(b)}=\{\cos\xi+\mu\sin\xi,-\sin\xi+\mu\cos\xi,-\mu\} \tag{8}$$

$$[\underset{\sim}{L}]=\begin{bmatrix} Hp & 0 & -Hq\cos2\omega \\ 0 & Hp & -Hq\sin2\omega \\ -Hq\cos2\omega, & -Hq\sin2\omega, & Hp \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\{\dot{\underset{\sim}{Q}}\}^T=\{\dot{Q}_1,\ \dot{Q}_2,\ \dot{P}\} \qquad T\text{ は転置を示す} \tag{10}$$

となる。ここで、H_pは$(H_1+H_2)/2$、$Hq=(H_1-H_2)/2$、H_1,H_2はそれぞれファブリックテンソルの主値を表す。

以上の式に基づいて、次のことが容易に証明できる。

（１）$\sin2\omega\neq0$のとき、$\dot{Q}_2=0$（すなわち、応力主軸方向は変化しない）であっても、$\hat{f}^{(a)}\neq\hat{f}^{(b)}$であり、$\dot{\gamma}^{(a)}\neq\dot{\gamma}^{(b)}$となり、非共軸成分をもたらす。このことは、単調載荷時の、堆積方向と最大圧縮応力の方向が一致しない場合の非共軸性を表現できることを示している。

（２）$\dot{Q}_1=\dot{P}=0$、$\dot{Q}_2\neq0$ の主応力軸の回転のみが生ずる場合（この時は、一方のすべり面のみが負荷状態となり、他方は除荷となる）、$\sin2\omega=0$ であれば、$d_1=0, d_2\neq0$　であるから、$\delta=\pi/4$（$\tan2\delta=d_2/d_1$）の非共軸性が生じ、また、L_{32}が0であるから$\dot{v}=0$ であることがわかる（３行目にダイレイタンシーが表現されていることに注意）。$\sin2\omega\neq0$　であるときには、$\delta<\pi/4$　の非共軸性が生じ、$\dot{v}\neq0$ となり、ダイレイタンシーが生じることになる。

以上、二つの特性より、異方性を加味した二重すべりモデルは、少なくとも、定性的には、目的とした砂の変形特性の表現が可能であることがわかる。

参考文献

Anand(1983):J.Mech.Phs.Splids,31,105-122

Nemat-Nasser(1983):J.Apl.Mech, 50,1114-1126

飛田他(1986):土木学会論文集、No.370,57-66

Tobita and Yanagisawa(1990): Modified stress--，土質工学会論文報告集（投稿中）あるいは、飛田(1990)土質工学研究発表会概要集