

II-272 長波の数値解析における開放境界スキームの誤差について

パシフィックコンサルタンツ 正 員 寺島 貴志
 パシフィックコンサルタンツ 正 員 古屋 温美
 北海道大学工学部 正 員 浜中建一郎

1. まえがき 長波の数値解析における開放境界でのいわゆる無反射スキームに関しては、種々の提案がなされている様であるが(日野 1988)、その中では、日野(1987)、日野、仲座(1987)、日野、仲座(1988)によるスキームが最も簡便であると言われている。その原理はある時間ステップまで波が開放境界を自由に通過していたとして、次の時間ステップの水位を求めるのに、仮に波が開放境界で完全反射するとして推定した水位の 1/2 を通過波の水位とするというものである。更に、この方法は境界に対する波の方向を考慮する必要がないとされている。本研究では、Leapfrog法にこのスキームを適用した場合の開放境界での誤差を長波の波動解を用いて調べた。それによれば、1次元伝播の場合は確かにこの方法で精度よく推定できるものの、2次元伝播ではその誤差が波の方向性に強く依存していることが分かった。

2. 連続式及び長波の波動解 2次元伝播に於ける連続式は差分化すると次のようになる。

$$\frac{\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} = \frac{M_{i-1,j}^n - M_{i+1,j}^n}{\Delta s} + \frac{N_{i,j-1}^n - N_{i,j+1}^n}{\Delta s} \quad (1)$$

一方、計算領域内では長波で伝播すると仮定し、波数ベクトルを $k=(l,m)$ とすると、水位と流量は次式で与えられる。但し、 $\cos \delta = l/k$ $\sin \delta = m/k$

$$\eta = a \sin(lx + my - \omega t), \quad M = aC \cos \delta \sin(lx + my - \omega t), \quad N = aC \sin \delta \sin(lx + my - \omega t) \quad (2)$$

3. 日野のスキーム ここでは y 軸と平行に開放境界を設定し、波はある角度を持ちつつ x の正の方向に進み、この開放境界を通過するものとする。日野等のスキームの原理についてはまえがきで述べたが、具体的にはいくつかのスキームが考えられている。第一の方法は、仮に水位を x 成分と y 成分に分離できるものとし、その x 成分だけを仮想反射させ 1/2 とするものである。この場合分離方法としていくつか考えられるので、ここではそれを SCHEME I-1, SCHEME I-2 とする。

1) SCHEME I-1: $\eta_{i,j}^{n-1}$ は y 方向にのみ寄与すると仮定する。

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_x &= \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta s} M_{i-1,j}^n = \frac{1}{2} (a \cos \delta \sin \theta - \cos^2 \delta a \omega \Delta t \cos \theta) \\ \tilde{\eta}_y &= \frac{\Delta t}{\Delta s} (N_{i,j-1}^n - N_{i,j+1}^n) + \eta_{i,j}^{n-1} = -2 \sin^2 \delta \omega \Delta t \cos \theta + (a \sin \theta + a \omega \Delta t \cos \theta) \end{aligned} \quad (3)$$

2) SCHEME I-2: $\eta_{i,j}^{n-1}$ は x 方向にのみ寄与すると仮定する。

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta s} M_{i-1,j}^n + \eta_{i,j}^{n-1} \right) = \frac{1}{2} (a \cos \delta \sin \theta - \cos^2 \delta a \omega \Delta t \cos \theta + a \sin \theta + a \omega \Delta t \cos \theta) \\ \tilde{\eta}_y &= \frac{\Delta t}{\Delta s} (N_{i,j-1}^n - N_{i,j+1}^n) = -2 \sin^2 \delta \omega \Delta t \cos \theta \end{aligned} \quad (4)$$

結局、(3)、(4)式より水位は $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_x + \tilde{\eta}_y$ で表される。一方、(2)式による η の真値は次式で与えられる。

$$\eta = \eta_{i,j}^{n+1} = a \sin \theta - a \omega \Delta t \cos \theta \quad (5)$$

ただし、 $\theta = li \Delta s + mj \Delta s - \omega n \Delta t$, $\sin \delta = m/k$, $\cos \delta = l/k$ である。したがって、誤差は $Er = \tilde{\eta} - \eta$ となる。

SCHEME I では、 $\tilde{\eta}$ を x 方向と y 方向成分に分離し得るという仮定に少し無理があった。そこで第2の方法として、日野等は次の方法を提案している。ここではそれを SCHEME II-1 と呼ぶ。

1) SCHEME II-1: 開放境界上にそれと直角にさらに仮想境界設けそこでも反射させ水位を 1/2 とする。

$$\tilde{\eta}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{ds} (M_{i-1,j}^n + N_{i,j-1}^n) + \eta_{i,j}^{n-1} \right) = D_1 a \sin \theta, \quad D_1 = \frac{1}{2} \frac{(2 \cos \delta - \pi/4 + 1)}{2} \quad (6)$$

2) SCHEME II-2: SCHEME II-1では境界にむかい左右非対称の性質を持つ。そこで新たに、右と左に仮想境界を設けたものの平均をとるスキームを考える。

$$\tilde{\eta}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dt}{ds} (M_{i-1,j}^n + N_{i,j-1}^n) + \eta_{i,j}^{n-1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{ds} (M_{i-1,j}^n - N_{i,j+1}^n) + \eta_{i,j}^{n-1} \right) \right) \quad (7)$$

$$= D_2 a \sin \theta, \quad D_2 = \frac{\cos \delta + 1}{2}$$

4. 誤差 図-1は SCHEME I-1、I-2 に於ける真値との差を表す。横軸は境界上の位相 θ , $\delta = 0$ は直角入射である。これによると、SCHEME I-1では波が境界に平行入射の時有利であり、SCHEME I-2では直角入射の時有利であるが共に波の方向性に強く依存していることが分かる。なお共に $\delta = 0$ に関し左右対称である。図-2は SCHEME II-1、II-2に於ける(6)式(7)式の係数 D である。II-1では仮想境界に対し物理的にも反射し得る方向からの波に対し明らかに有利である。II-2ではその非対称性が解消されている。図-3はSCHEME II-1の方向特性を確かめるためのモデル計算である。b)では辺BCに波の入射方向に対し不利なスキームに設定しており、明らかに誤差が内部に反射し内部の波を歪めている。このことから、境界毎に最も適したスキームを選ぶ必要がある。

参考文献 日野幹雄(1987):東工大土木工学研究報告 No38, pp31-38 日野幹雄・仲座栄三(1987):同上, No38 pp39-50 日野幹雄(1988):同上, No39, pp1-8 日野幹雄・仲座栄三(1988):海講論文集, 第35回, pp262-266

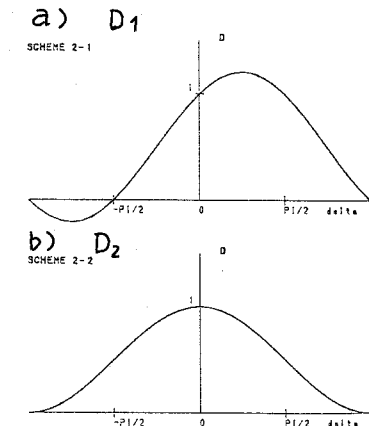


図-2 SCHEME IIの係数 a) II-1, b) II-2

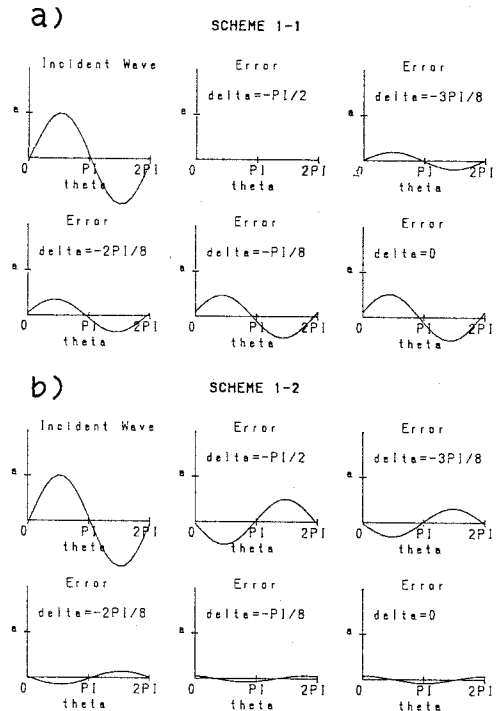


図-1 誤差 a) SCHEME I-1 b) SCHEME I-2

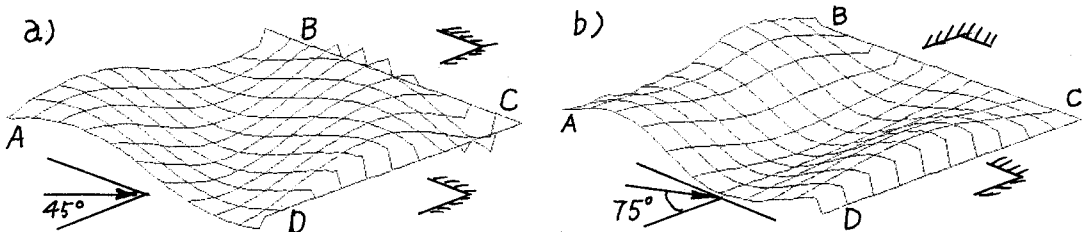


図-3 SCHEME II-1を用いた計算例。辺AB, ADは入射境界、BC, DCはSCHEME II-1を用いた開放境界。

$t = 200 * \Delta t$ a) BC, DC共に有利な場合。 b) BCが不利な場合