

II-271 開放境界からの反射率と誤差の伝播について

北海道大学工学部 正 員 浜中建一郎

1. まえがき 著者等はこれまで、長波の数値解析に於ける開放境界での日野の無反射スキーム(日野 1987, 1988、日野、仲座 1987, 1988)の誤差について調べてきた(寺島等 1990)。それによって、日野のスキームでも誤差が開放境界に対する波の入射角に強く依存することが分かった。しかしながら、この方法では1ステップ時間を進めることにより開放境界にどのような誤差が生ずるかは論ずることが出来るものの、時間ステップを次々に進めることによって誤差がどの様に累積し又それがどの様に計算領域に伝播するかという疑問に答えることは出来ない。このことから本研究では、計算領域に入射する本来の波が定常波動とするなら、十分に長い計算時間の後には計算領域内では開放境界から生ずる誤差も含めて定常な波動場となっていると仮定し、その時の誤差を見かけの反射波と見なし、その反射率を求めたものである。又、簡単なモデル計算を行い、求めた反射率がほぼ妥当な値であることを確かめた。

2. 開放境界からの反射 ここで用いる差分スキームはleapfrog法とする。日野等によって提案されている開放境界のスキームは一般化すると、次の時間ステップの通過波の水位を開放境界近傍の前ステップの水位、流量の線形結合で推定するものと言うことが出来る。従ってそのスキームは一般的に

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \frac{\Delta t}{\Delta s} (\alpha_1 M_{i-1,j}^n + \alpha_2 N_{i,j-1}^n + \alpha_3 N_{i,j+1}^n) + \alpha_4 \eta_{i,j}^{n-1} \quad (1)$$

と表すことが出来る。ここで、 η は水位、 M 、 N は x 、 y 方向の流量で n は時間ステップ、 i 、 j は x 、 y 方向の空間ステップを表す。開放境界は $x = i\Delta s$ にあり波は x の正の方向に通過するものとする。開放境界を通過しようとする波と誤差によって生ずる波を共に長波とすると、各々、

$$I^{\eta} = \sin(lx+my-wt), \quad I^M = \frac{1}{k} c \sin(lx+my-wt), \quad I^N = \frac{m}{k} c \sin(lx+my-wt) \quad (2)$$

$$R^{\eta} = R \sin(-lx+my-wt), \quad R^M = -R \frac{1}{k} c \sin(-lx+my-wt), \quad R^N = R \frac{m}{k} c \sin(-lx+my-wt)$$

となる。ここで、 $k = |\mathbf{k}|$ は波数、 l 、 m はその x 、 y 成分、 $c = \sqrt{gh}$ は波速、 R は反射率である。又、パラメータ β 、 γ を次の様に定める。 $\Delta t/\Delta s = \beta/c$, $\omega \Delta t = \gamma$

(2)式を(1)式に代入して $n+1$ ステップの水位を求めると、差分スキームで求めた値に記号 $\sim$ を付して表すと

$$I^{\sim\eta}_{i,j}^{n+1} = P_1 \sin \theta + P_2 \cos \theta, \quad R^{\sim\eta}_{i,j}^{n+1} = R P_3 \sin \theta' + R P_2 \cos \theta' \quad (3)$$

$$P_1 = \{ \beta (\alpha_1 \frac{1}{k} + \alpha_2 \frac{m}{k} \alpha_3 \frac{m}{k}) + \alpha_4 \}, \quad P_2 = \gamma \{ -\alpha_1 \frac{1}{k^2} - \alpha_2 \frac{m^2}{k^2} + \alpha_3 \frac{m^2}{k^2} + \alpha_4 \}$$

$$P_3 = \{ \beta (-\alpha_1 \frac{1}{k} + \alpha_2 \frac{m}{k} \alpha_3 \frac{m}{k}) + \alpha_4 \}, \quad \theta = li\Delta s + mj\Delta s - \omega t, \quad \theta' = \theta + \sigma$$

である。一方、(2)式から求まる $n+1$ ステップでの水位は、

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \sin \theta - \omega \Delta t \cos \theta + R \sin \theta' + R \omega \Delta t \cos \theta' \quad (4)$$

であり、 $x = i\Delta s$ の境界上で $\eta_{i,j}^{n+1} = I^{\sim\eta}_{i,j}^{n+1} + R^{\sim\eta}_{i,j}^{n+1}$ を全ての y と t で満たさなければならないから次式を得る。

$$R = \sqrt{(P_1 - 1)^2 + (P_2 + \gamma)^2} / \sqrt{(P_3 - 1)^2 + (P_2 + \gamma)^2} \quad (5)$$

3. モデル計算 前節の(5)式で求めた反射率を、寺島等(1990)のSCHEME II-1に対して求めたのが図-1

と2の実線であり、SCHEMEⅡ-2 に対して求めたのが図-3である。横軸は開放境界に対する波の入射角 δ である。これによると平行入射の $\delta = \pm \pi/2$ で $R = 1$ となっている。特に SCHEMEⅡ-1 の場合 $\delta = \pi/2$ ではこのスキームにとって有利な方向で波が入射しており奇異に感じられる。このことを確かめるため、つぎの様な数値計算を行った。矩形の計算領域ABCD (図-4、5参照)を考え辺ABを検定すべき開放境界とする。領域内を進行してきた波が辺ABを通過する際に1時間ステップで生ずる誤差は(2)、(3)式より、

$$\eta_E = I \eta_{i,j}^{n+1} - I \tilde{\eta}_{i,j}^{n+1} = (1 - P_1) \sin \theta + (\gamma + P_2) \cos \theta \quad (6)$$

であるから、入射波は与えず、この誤差だけを各時間ステップ毎に辺ABに付け加えることにより誤差の発達と伝播の様子が知れる。図-4、5はその1例である。なお領域内は全て線形計算、辺AB、BC、ADはSCHEMEⅡ-1、CDはSCHEMEⅡ-2で求めた。適当な時間後に定常になったことを確かめて、その時の辺AB上の誤差の振幅を求め、その誤差を生じさせた入射波の振幅との比から反射率を求めた。図-1、2の○印はこの反射率である。なお図-4、5の β 、 γ は図-1のものと同じであり、計算開始後120ステップ後のものである。この図から(5)式で求めた反射率はほぼ妥当な値を与えていることが分かる。

4. 結論 1)計算領域内からの波が開放境界に斜めに入射する時の誤差は通常の波として内部に伝えられるが、平行に近い角度で入射する時の誤差はたとえ1時間ステップで生ずる誤差は小さくても内部に伝わりにくく開放境界近傍に累積するものと思われる。

2)図-1で $\delta = \pi/2$ の時、(5)式はモデル計算より少なめの値を与えている。このことは、解析では誤差によって生ずる波の振幅は内部で一様としているが、実際には空間的に分布していることと、三角関数の増分を1次近似によって与えたことによるものと思われる。

3)現地を対象にした長波の数値解析を行う際にはその海域と入射波の特性を考慮し各々の開放境界に最も適当なスキームを選ぶ必要がある。又、与えられた β 、 γ のもとで最適な α 1から α 4を(5)式を用いて求める方法について今後考えて見たい。

参考文献 日野幹雄(1987):東工大土木工学研究報告, No38, pp31-38 日野幹雄, 仲座栄三(1987):同上, No38, pp39-50 日野幹雄(1988):同上, No39, pp1-8 日野幹雄, 仲座栄三(1988):海講論文集, 第35回, pp262-266 寺島貴志他(1990):年講第45回(投稿中)

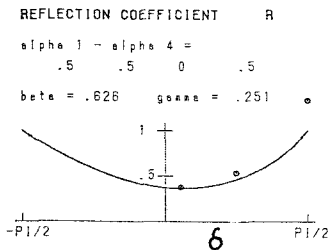


図-1 反射率SCHEMEⅡ-1

$\beta = .625 \quad \gamma = .251$

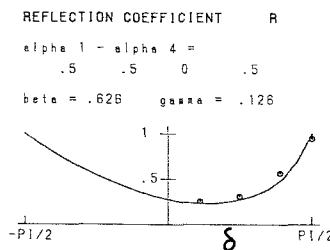


図-2 反射率SCHEMEⅡ-1

$\beta = .625 \quad \gamma = .125$

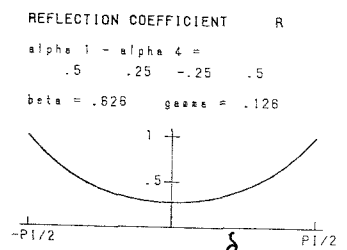


図-3 反射率SCHEMEⅡ-2

$\beta = .625 \quad \gamma = .125$

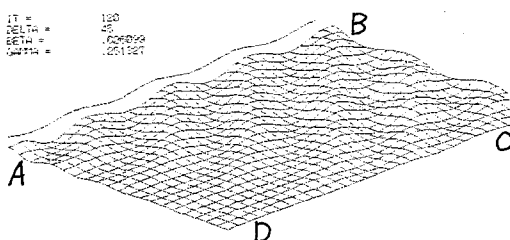


図-4 誤差の伝播 入射角45度

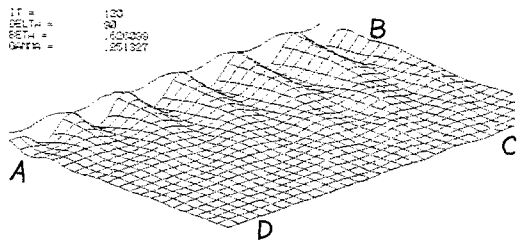


図-5 誤差の伝播 入射角90度(ABに平行)