

II-268

境界要素法による大阪湾三次元拡散の試算について

中部大学 工学部 正 員 吉 田 吉 治
中部大学 工学部 正 員 松 梨 順三郎

まえがき 大阪湾、播磨灘など閉水域における富栄養化現象には、栄養塩類の底泥からの溶出による寄与が大きいといわれる。この問題の数値シミュレーションを行うには鉛直拡散に重点をおいた三次元的取り扱いが必要である。上記の実際海域を対象とすると多数の節点を設ける必要があり、そのために、実用的精度を得ようとする、計算機容量、計算時間などの制約を受けることが多い。この難点を克服するため、問題の次元を一つ下げる、したがって、未知数を激減できるという特性をもつ境界要素法に注目し、この手法の適用性について検討した。

1 基礎式と境界要素法による定式化 大阪湾における長期的な予測を目標とし、研究の第一歩として、潮流もスケールの大きい渦とみなす。すなわち、対象領域を平均流のない乱流場と仮定する。基礎式および境界条件は次のようになる。（図-1参照）

$$\text{領域}\Omega\text{内で、 } D_x \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial Z^2} = 0 \quad (1)$$

$$\text{境界}\Gamma_1\text{上で、 } C = \bar{C} \quad (2)$$

$$\text{境界}\Gamma_2\text{上で、 } q_n = \bar{q}_n \quad (3)$$

ここに、 D_x, D_y, D_z は、それぞれ X, Y, Z 方向の拡散係数であり、 q_n は境界上の外向法線 $N(n_x, n_y, n_z)$ 方向の拡散流速とする。記号“ $\bar{\quad}$ ”は既知量である。次に最大水深 h_m を代表長、水の密度 ρ を代表濃度として、無次元量 $x = \sqrt{D_z/D_x} (X/h_m)$, $y = \sqrt{D_z/D_y} (Y/h_m)$, $z = Z/h_m$, $c = C/\rho$ を導入し、式(1),(2),(3)を無次元化すると次式を得る。

$$\text{領域}\Omega\text{内で、 } \partial^2 c / \partial x^2 + \partial^2 c / \partial y^2 + \partial^2 c / \partial z^2 = 0 \quad (3)$$

$$\text{境界}\Gamma_1\text{上で、 } c = \bar{c} = \bar{C}/\rho, \quad \text{境界}\Gamma_2\text{上で、 } q_n = q_n h_m / (D_z \bar{\rho}) = \bar{q}_n \quad (4)$$

この問題を境界積分方程式に変換するには、式(3)とその随伴微分方程式を組み合わせることによって得られる Green の恒等式を用いる方法、あるいは c の随伴濃度 c^* を重み関数とする重みつき残差法による方法がある。前者を用いると、Green の恒等式は次式となる。

$$\int_{\Omega} \{ \Delta [c] c^* - \Delta^* [c^*] c \} d\Omega = \int_{\Gamma} (q c^* - p^* c) d\Gamma \quad (5)$$

ここに、 $\Delta [c] = - [\partial^2 c / \partial x^2 + \partial^2 c / \partial y^2 + \partial^2 c / \partial z^2]$, $\Delta^* [c^*] = - [\partial^2 c^* / \partial x^2 + \partial^2 c^* / \partial y^2 + \partial^2 c^* / \partial z^2]$, $q = (-\partial c / \partial x) n_x + (-\partial c / \partial y) n_y + (-\partial c / \partial z) n_z$, $p^* = (-\partial c^* / \partial x) n_x + (-\partial c^* / \partial y) n_y + (-\partial c^* / \partial z) n_z$

次に、 c^* を式(3)の基本解とすると、 c^* は次式を満足する。

$$\Delta^* [c^*] = \delta(r - r_i) \quad (6)$$

ここに、 δ は Dirac のデルタ関数、 $r(x, y, z)$ は考察点、 $r_i(x_i, y_i, z_i)$ は負荷点の位置を示す。式(6)の解は、次式で与えられる。

$$c^*(r, r_i) = 1 / [4\pi |r - r_i|] \quad (7)$$

i 点を境界上にとり、一定要素を用いると、次式を得る。

$$k_i c_i(r_i) - \sum_{j=1}^N c_j \int_{\Delta \Gamma_j} p^* d\Gamma = - \sum_{j=1}^N q_j \int_{\Delta \Gamma_j} c^* d\Gamma \quad (8)$$

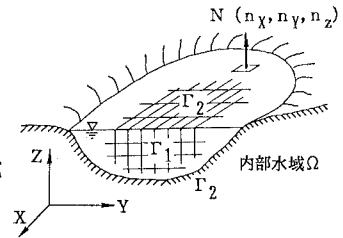


図-1 座標系

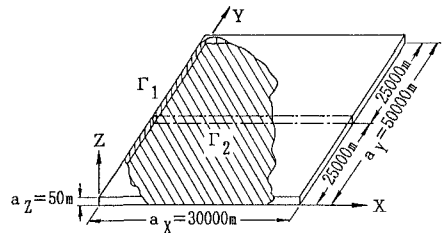


図-2 直方体水槽モデル

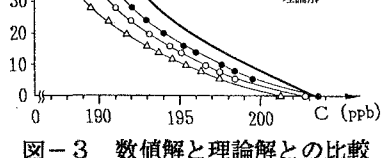
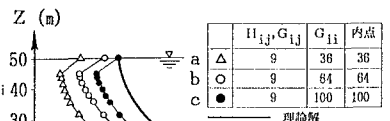


図-3 数値解と理論解との比較

上式を $i = 1 \dots N$ について設定し、これらを行列表示すると

$$\begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & \dots & H_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & \dots & G_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\text{ここに、} H_{ij} = \int_{\Delta \Gamma_j} p^* d\Gamma, G_{ij} = \int_{\Delta \Gamma_j} c^* d\Gamma \quad (10)$$

2 偏平直方体水槽モデルへの適用 図-2は、大阪湾の東西、南北、水深のオーダーを参照した直方体モデル ($a_x = 30 \text{ km}$, $a_y = 50 \text{ km}$, $h_m = 50 \text{ m}$) である。境界 Γ_1 で $C = \bar{C} = 0$, 境界 Γ_2 で $q_N = \bar{q}_N = 50 \text{ mg/m}^2/\text{day}$, その他の境界で $q_N = 0$ とした。また、 $D_x = D_y = 20 \text{ m}^2/\text{s}$, $D_z = 100 \text{ m}^2/\text{day}$ とし、四角形の一定要素を用いた。この場合の理論解は次となる。

$$C(X, Y, Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8 a_x \bar{q}_N}{n^2 \sqrt{D_x D_z} (2n+1)^2 \pi^2} \cdot \frac{\cosh \left[\frac{(2n+1) \pi}{(2n+1) \pi Z_1} \left(\frac{Z_1 - Z \sqrt{D_x/D_z}}{(2a_x)} \right) \right]}{\sinh \left[\frac{(2n+1) \pi Z_1}{(2a_x)} \right]} \cdot \sin \left[\frac{(2n+1) \pi X}{2a_x} \right] \quad (11)$$

式(10)の計算には Gauss-Legendre の数値積分公式を用いた。図-3によると積分の点数を増加するほど数値解は理論に近づき、水面付近と水底付近を除いてほぼ妥当な結果である。

3 大阪湾への適用 図-4は大阪湾水域を取り囲む全境界の四辺形要素による分割図である。同図(a)は海底図であり、 $q_N = 4.652 \times 10^{-8}$ を与えた湾奥の境界 Γ_2 と、 $q_N = 0$ を与えた境界 Γ_2' とからなる。同図(b)は $c = 4.0 \times 10^{-9}$ を与えた明石海峡 Γ_1 , $C = 1.0 \times 10^{-9}$ を与えた紀伊水道 Γ_1' , および $q_N = 0$ を与えた水表面境界 Γ_2' を示す。 q_N, D_x, D_y, D_z は前項のモデルと同じであるが、ここでは $h_m = 98 \text{ m}$ として、式(4)から q_N を求めた。一定要素を用い、要素数の総計845で、多元連立方程式の解

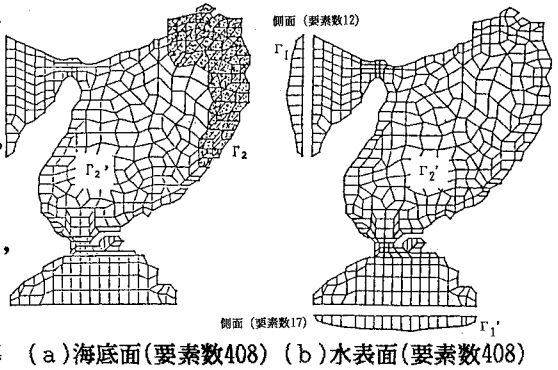


図-4 全境界の要素分割図

法として Gauss-Seidel 法を用いた。なお、 H_{ij} , G_{ij} , 内点の計算には前項のケースcを用いた。図-5はこの場合の計算結果である。湾奥の海底で溶出した栄養塩が明石海峡、紀伊水道などの開境界に向けて輸送されていく様子をよみとることができる。なお、式(10)によって H_{ij} を計算するには、負荷点 i と要素平面との空間距離を定量する必要がある。本計算では図-6のように、4つの端点のうち3つの端点がそれぞれ異なる三角形を構成するように選び、三つの三角形の重心が指定する平面をその要素の代表面とした。

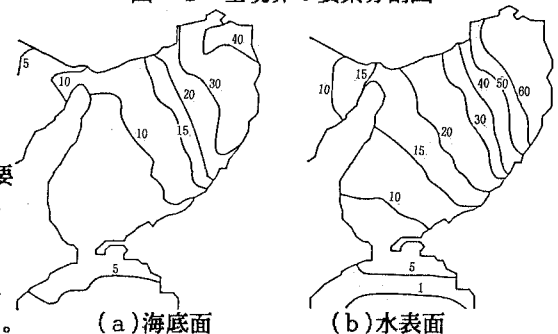


図-5 濃度分布 (単位: ppb)

4 参考文献

- 1) 河村隆二, 福岡通人: 境界要素法による三次元非定常移流拡散の直接解法, 境界要素法第27回例会資料, 1989
- 2) 池内雅紀, 田中正隆: 非定常移流拡散問題の境界要素解の安定性と精度について, 日本シミュレーション学会, 第8回電気・電子工学への有限要素法の応用シンポジウム, 1985
- 3) 神谷紀生: 有限要素法と境界要素法, サイエンス社, 1982

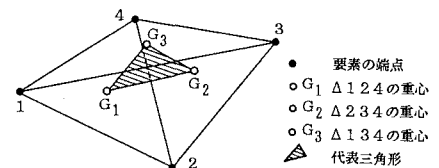


図-6 要素の代表平面