II-262 **陰形式差分法を用いた河川網の洪水流解析法**

中電技術コンサルタント　正　員　金本　満
広島大学　工学部　　　正　員　常松芳昭

1．まえがき：本報告は河川網における漸変非定常流の基礎式を４点Implicit法により離散化し，これをNewton-Raphson法を用いて解く場合の河川網のシステムモデルをグラフ理論を用いて系統的に定式化したものである．

2．単一河川における表示方法：１本の河川をグラフの枝に対応させ，任意の枝はＮ個の断面に分割されているものとする．４点Implicit法により離散化された運動方程式を $F_i\,(h_i, q_i, h_{i+1}, q_{i+1})=0$，連続方程式を $G_i\,(h_i, q_i, h_{i+1}, q_{i+1})=0$ とする[1]．ただし，ｈ，ｑは次時刻ステップの水位，流量であり，ｉは断面番号($i=1,\cdot\cdot,N-1$)である．これらの非線形代数方程式はNewton-Raphson法によって解かれるが，その場合，河川網への拡張が容易なように，上・下流端における境界条件式を除いた２Ｎ－２個の方程式を(１)式のように表示しておく．なお，Δは収束計算を行なう上でのｋステップとｋ＋１ステップの未知水理量の差を表す．

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
a_1 & 0 & b_1 & 0 & c_1 & 0\cdots0 & d_1 & 0\cdots0 \\
u_1 & 0 & v_1 & 0 & w_1 & 0\cdots0 & x_1 & 0\cdots0 \\
\hline
0 & a_{N-1} & 0 & b_{N-1} & 0\cdots0 & c_{N-1} & 0\cdots0 & d_{N-1} \\
0 & u_{N-1} & 0 & v_{N-1} & 0\cdots0 & w_{N-1} & 0\cdots0 & x_{N-1} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & a_2\ b_2 & & c_2\ d_2 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & u_2\ v_2 & & w_2\ x_2 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \ddots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & a_{N-1}\ b_{N-1} & & c_{N-1}\ d_{N-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & & u_{N-1}\ v_{N-1} & & w_{N-1}\ x_{N-1}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\Delta h_1 \\ \Delta h_N \\ \hline \Delta q_1 \\ \Delta q_N \\ \hline \Delta h_2 \\ \vdots \\ \Delta h_{N-1} \\ \hline \Delta q_2 \\ \vdots \\ \Delta q_{N-1}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
-G_1 \\ -F_1 \\ \hline -G_{N-1} \\ -F_{N-1} \\ \hline -G_2 \\ -F_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ -G_{N-2} \\ -F_{N-2}
\end{array}\right] \qquad (1)$$

ただし，

$$a_i^j=\frac{\partial G_i}{\partial h_i},\quad b_i^j=\frac{\partial G_i}{\partial q_i},\quad c_i^j=\frac{\partial G_i}{\partial h_{i+1}},\quad d_i^j=\frac{\partial G_i}{\partial q_{i+1}},\quad u_i^j=\frac{\partial F_i}{\partial h_i},\quad v_i^j=\frac{\partial F_i}{\partial q_i},\quad w_i^j=\frac{\partial F_i}{\partial h_{i+1}},\quad x_i^j=\frac{\partial F_i}{\partial q_{i+1}}$$

であり，ｊは枝番号を表す．ここで，以後の展開の便宜上，(１)式の行列およびベクトルを破線で示してあるように，部分行列，部分ベクトルに分割すれば，(１)式は(２)式のように表示される．ただし，下付の～はベクトルを表している．

3．河川網への拡張：いま，ｅ本の枝，ｎ個の節点を持つ河川網を考える．このような河川網に(２)式を適用すると(３)式のように表示できる．

$$\begin{bmatrix}
U_1 & 0 & V_1 & 0 & U_3 & V_3 \\
0 & U_2 & 0 & V_2 & U_4 & V_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & U_5 & V_5
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta \underset{\sim}{X}_1 \\ \Delta \underset{\sim}{X}_N \\ \Delta \underset{\sim}{Y}_1 \\ \Delta \underset{\sim}{Y}_N \\ \Delta \underset{\sim}{X} \\ \Delta \underset{\sim}{Y}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-\underset{\sim}{B}_1 \\ -\underset{\sim}{B}_{N-1} \\ -\underset{\sim}{B}
\end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$\begin{bmatrix}
P_1 & 0 & R_1 & 0 & P_3 & R_3 \\
0 & P_2 & 0 & R_2 & P_4 & R_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & P_5 & R_5
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta \overset{+}{\underset{\sim}{h}} \\ \Delta \overset{-}{\underset{\sim}{h}} \\ \Delta \overset{+}{\underset{\sim}{q}} \\ \Delta \overset{-}{\underset{\sim}{q}} \\ \Delta \underset{\sim}{h} \\ \Delta \underset{\sim}{q}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-\underset{\sim}{G}_1 \\ -\underset{\sim}{G}_{N-1} \\ -\underset{\sim}{G}
\end{bmatrix} \qquad (3)$$

ただし，ａ＝１，・・，５とすれば，

$$P_a=\begin{bmatrix} U_a^1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_a^e \end{bmatrix},\quad R_a=\begin{bmatrix} V_a^1 & & \\ & \ddots & \\ & & V_a^e \end{bmatrix},\quad \Delta\overset{+}{\mathbf{h}}=\left[\Delta\mathbf{X}_1^1,\cdots,\Delta\mathbf{X}_1^e\right]^T\quad \Delta\overset{-}{\mathbf{h}}=\left[\Delta\mathbf{X}_N^1,\cdots,\Delta\mathbf{X}_N^e\right]^T$$

$$\Delta\overset{+}{\mathbf{q}}=\left[\Delta\mathbf{Y}_1^1,\cdots,\Delta\mathbf{Y}_1^e\right]^T\quad \Delta\overset{-}{\mathbf{q}}=\left[\Delta\mathbf{Y}_N^1,\cdots,\Delta\mathbf{Y}_N^e\right]^T$$

$$\Delta\mathbf{h}=\left[\Delta\mathbf{X}^1,\cdots,\Delta\mathbf{X}^e\right]^T,\quad \Delta\mathbf{q}=\left[\Delta\mathbf{Y}^1,\cdots,\Delta\mathbf{Y}^e\right]^T$$

$$\mathbf{G}_1=\left[\mathbf{B}_1^1,\cdots,\Delta\mathbf{B}_1^e\right]^T,\quad \mathbf{G}_{N-1}=\left[\mathbf{B}_{N-1}^1,\cdots,\Delta\mathbf{B}_{N-1}^e\right]^T,\quad \mathbf{G}=\left[\mathbf{B}^1,\cdots,\Delta\mathbf{B}_N^e\right]^T$$

である．ここで，節点（分・合流点）におけるエネルギー損失を無視したときの水位の連続条件が考慮できるように，節点で定義される水位の変化量$\Delta\mathbf{H}=[\Delta H_1,\cdot\cdot,\Delta H_n]^T$を導入し，入・出連結行列を用いると，

$$\Delta\overset{+}{\mathbf{h}}=\overset{+}{D}{}^T\Delta\mathbf{H}\quad,\quad \Delta\overset{-}{\mathbf{h}}=\overset{-}{D}{}^T\Delta\mathbf{H} \tag{4}$$

のように表示できる[2)]．ただし，$\overset{+}{D}$：出連結行列，$\overset{-}{D}$：入連結行列，T：転置を表す．

さらに，境界条件の導入のために，入・出連結行列および節点で定義された水位の微小変化量をソース，中間ノード，シンクに分割し，それぞれを下付き添字＋，０，－で表す．(４)式を(３)式に代入し，展開すると，

$$\begin{aligned} &P_1\overset{+}{D}_+\Delta\mathbf{H}_+ + P_1\overset{+}{D}_0\Delta\mathbf{H}_0 + R_1\Delta\overset{+}{\mathbf{q}} + P_3\Delta\mathbf{h} + R_3\Delta\mathbf{q} = -\mathbf{G}_1 \\ &P_2\overset{-}{D}_0\Delta\mathbf{H}_0 + P_3\overset{-}{D}_-\Delta\mathbf{H}_- + R_2\Delta\overset{-}{\mathbf{q}} + P_4\Delta\mathbf{h} + R_4\Delta\mathbf{q} = -\mathbf{G}_{N-1} \\ &P_5\Delta\mathbf{h} + R_5\Delta\mathbf{q} = -\mathbf{G} \end{aligned} \tag{5}$$

となる．

また，一般的に境界条件として，ソースには流量ハイドログラフ，シンクには水位ハイドログラフが与えられ，中間ノードでは流量の連続条件を考慮することになる．これらの境界条件式をTaylor展開し２次以上の微小項を無視すれば，次のように表示できる[2)]．

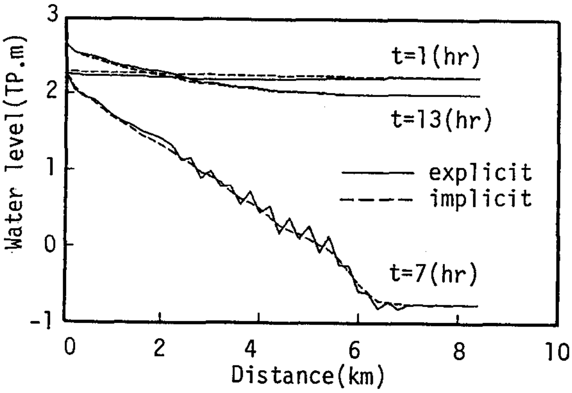
$$\overset{+}{D}_+\Delta\overset{+}{\mathbf{q}}=-\mathbf{F}_1\quad,\quad \overset{+}{D}_0\Delta\overset{+}{\mathbf{q}}-\overset{-}{D}_0\Delta\overset{-}{\mathbf{q}}=-\mathbf{F}_2\quad,\quad E\Delta\mathbf{H}_-=-\mathbf{F}_3 \tag{6}$$

のようになる．ただし，Ｅは単位行列であり，各式右辺のベクトルは未知水理量の逐次近似値を境界条件式に代入して得られたものである．したがって，(５)，(６)式を連立すれば，$2\Sigma N_j-2e+n$個の連立方程式($j=1,\cdot\cdot,e$)が得られ，これをくり返し収束計算することにより，次時刻ステップの諸量を求めることができる．

４．数値計算結果：本解析手法を広島市内河川網の洪水流解析に適用し，別報[3)]で提案した陽解法の結果と比較したところ，図－１に示すように水面形は比較的滑らかな遷移を示しており，安定な計算結果が得られていることがわかる．

最後に，建設省太田川工事事務所ならびに広島県より貴重な資料を貸与して頂いた．ここに記して謝意を表します．

参考文献：1)土木学会編：水理公式集．　2)金本・常松他：第42回中四支部研究発表会概要集．　3)常松・金本他：第42回中四支部研究発表会概要集．



図－１　水面形の比較