II-261　Bingham 流体の開水路流速分布の解析

名古屋大学大学院　学生員　是津文章
山梨大学工学部　正会員　荻原能男
山梨大学工学部　正会員　宮沢直季

１．はじめに

大きな災害をもたらす土石流や泥流の流動特性を解明することは、その防災上重要な問題である。また施工現場での流動化コンクリートの開水路流れ等の問題も研究が必要になってくる。これらの流動には塑性が見られるため、流動特性解明の際 Newton 流体として取り扱うには少々無理がある。現在土石流の流動機構を記述するモデルとして、Bingham 流体とダイラタント流体が良く用いられているが、工学的には塑性流体をBingham 流体として取り扱うことが多い。

そこで本研究では、これらの開水路における基本的流動特性を解明することを将来の目的とし、その基礎的研究として流速分布の解析を行う。

２．流速分布の解析方法

まず本研究で対象とする流れの条件は、

①矩形断面水路
②等流
③層流

以上３つである（水路断面は図 ２・１，流れ方向をｘ軸とする。）。

次に基本方程式[1]を述べる。

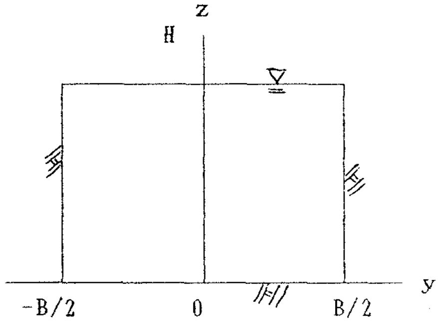

図 ２・１　水路断面

（ａ）連続の方程式（Euler 表示）

非圧縮性流体のとき
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (2\cdot1)$$

u：ｘ軸方向の流速，v：ｙ軸方向の流速，w：ｚ軸方向の流速

$v=w=0, u=u(y,z)$とすると、式(2·1)は明らかに満足される。

（ｂ）レオロジー方程式

３次元流を取り扱う場合には厳密には３次元的なレオロジー方程式（Henkey による説）を必要とするが、これをそのまま用いて解析解を得ることは相当困難であるし、また上でも述べた様に本研究では諸条件より$v=w=0, u=u(y,z)$と近似したため、レオロジー方程式としては２次元流のものを２方向に拡大したものである程度説明が付くものと思われる。そこでレオロジー方程式を次のように考える。

$$\sigma_{yx}=p_y-\eta_B\frac{\partial u}{\partial y}\quad(\sigma_{yx}>p_y)\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0\quad(\sigma_{yx}<p_y) \qquad (2\cdot2)$$

$$\sigma_{zx}=p_y+\eta_B\frac{\partial u}{\partial z}\quad(\sigma_{zx}>p_y)\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=0\quad(\sigma_{zx}<p_y) \qquad (2\cdot3)$$

σ_{ij}：応力テンソル，p_y：降伏応力，η_B：塑性粘度

式(2·2)についてグラフ化すると図 ２・２の様になる（式(2·3)についてもほぼ同様）。この図を見ても分かるようにBingham 流体においてはレオロジー方程式は非線形となる。この点が後に微分方程式を解く上で問題となる。

（ｃ）Cauchy の運動方程式

諸条件より　$$-\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}=-\rho g I \qquad (2\cdot4)$$

ρ：密度，g：重力加速度，I：圧力水頭勾配

基本方程式（a）～（c）より結局、式(2･2)～式(2･4)を連立させて解けば良い事になる。ところが先にも述べた様に、レオロジー方程式が非線形であるため解法に多少工夫を要する。ここではその解法としてレオロジー方程式の直線部を延長したもの（式(2･2)の左式，式(2･3)の左式）を考え、それについて式(2･4)と組み合わせて解き、２つの応力が共に降伏値以上の領域での解とみなす。それ未満の領域については、速度勾配が０であることを利用すれば容易に求められる。なお境界条件は、

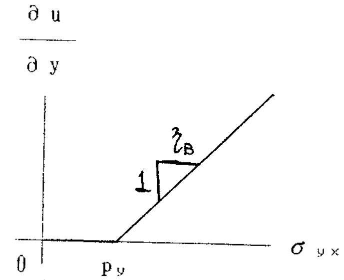

図２・２　$\sigma_{yx}\sim\frac{\partial u}{\partial y}$ 関係

$$\left.\begin{array}{llll} y=0\text{（水路中央）} & \text{で}\ \sigma_{yx}=0 & \therefore \sigma_{yx}(0,z)=0 \\ y=B/2\text{（側壁）} & \text{で}\ u=0 & \therefore u(B/2,Z)=0 \\ z=0\text{（水路床）} & \text{で}\ u=0 & \therefore u(y,0)=0 \\ z=H\text{（水面）} & \text{で}\ \sigma_{zx}=0 & \therefore \sigma_{zx}(y,H)=0 \end{array}\right\} \qquad (2\cdot5)$$

である。

３．解析結果

２．で述べた方程式を解くと複雑な級数解を得るが、現象の類似性を見出すため無次元化し関係物理量に着目して整理し直す。

$$f\ (\ N_B\ ,\ \rho gIB/p_y,\ H/B,\ y/B,\ z/H\ )=0 \qquad (3\cdot1)$$

$$g\ (\ \sigma_{yx}/p_y,\ \rho gIB/p_y,\ H/B,\ y/B,\ z/H\ )=0 \quad (\sigma_{yx}/p_y>1\text{に対して}) \qquad (3\cdot2)$$

$$h\ (\ \sigma_{zx}/p_y,\ \rho gIB/p_y,\ H/B,\ y/B,\ z/H\ )=0 \quad (\sigma_{zx}/p_y>1\text{に対して}) \qquad (3\cdot3)$$

N_B：Bingham数に似た無次元数（$=p_yB/(\eta_B u)$）

H/B：アスペクト比

４．考察

まず解析解をプログラム化し、アスペクト比を３通り（1/2,1,2）変化させ、それに対して$\rho gIB/p_y$の値を細かく変えたときの栓流面積比の割合を調べる（図 ４・１）。栓流面積比とは全流積に対する栓流部分の流積の割合の事を言うこととする。なお栓流とはずりの変形を生ぜず、ひとかたまりとなって動く部分の流動の事である。考察内容については５．結論と重複するので、ここでは省略する。

５．結論

・Bingham 流体の開水路における流速分布を解析解で得ることが出来た。

・栓流面積比はアスペクト比と$\rho gIB/p_y$の値によって決定される。

・栓流面積比は$\rho gIB/p_y$の増加に対して双曲線的に減少する。

・同一の$\rho gIB/p_y$に対して最も栓流が形成されにくい（i.e.栓流面積比が小さい）水路断面形状は、アスペクト比が１に近い断面形（正方形断面水路）である。

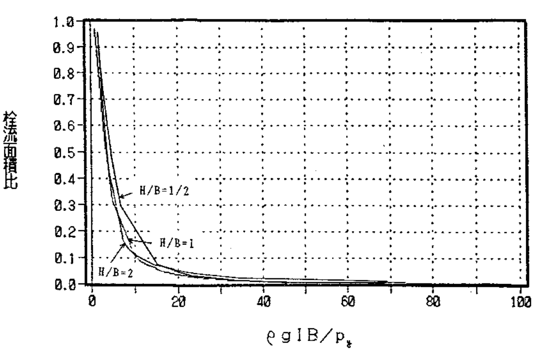

図４・１ $\rho gIB/p_y$～栓流面積比 関係

６．参考文献

（１）富田幸雄：レオロジー（機械工学大系⑫），コロナ社，１９７５