II-259　　3次元非圧縮粘性流れの有限要素解析

中央大学　学生員　畑中　勝守
中央大学　正　員　川原　睦人

１．　はじめに

非圧縮粘性流体の有限要素解析の手法のひとつに、筆者らがこれまで用いてきた流速修正法という手法がある。[1],[2] この手法は圧力場と速度場を分離して解くいわゆる分離解法のひとつであり、それぞれに同次（１次）の補間関数を使用できるという利点がある。しかしながら、流速修正法は第二種境界条件の取り扱いに矛盾があり信頼性に欠ける手法であることが明らかになってきた。[3] そこで筆者らは流速修正法の問題を改善した新しい分離型法を提案し、２次元問題において数種の数値解析を行い、その適用性を示してきた。[4],[5]

そこで今回の報告では、この新しい分離型法の３次元問題への拡張の手始めとして、３次元キャビティ内強制対流の計算を行いその結果を報告する。

２．　支配方程式と離散化

2-1．　時間方向離散化

流れを非定常非圧縮粘性流れとし、基礎方程式は次の Boussinesq 近似された Navier-Stokes 方程式と連続式を用いる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j u_{i,j}+\frac{1}{\rho}\,p_{,i}-\nu(u_{i,j}+u_{j,i})_{,j} \;=\; 0 \quad \text{in } V \quad (1)$$

$$u_{i,i} \;=\; 0 \quad \text{in } V \quad (2)$$

$$u_i \;=\; \hat{u}_i \quad \text{on } S_1 \quad (3)$$

$$\left\{-\frac{1}{\rho}\,p\delta_{ij}+\nu\,(u_{i,j}+u_{j,i})\right\}n_j \;=\; \hat{t}_i \quad \text{on } S_2 \quad (4)$$

ここに、u_iは流速、p は圧力、ρは密度、νは粘性係数である。新しい分離解法は、時間方向の離散化を以下のように行う。

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+u_j^n u_{i,j}^n+\frac{1}{\rho}\,p_{,i}^{n+1}-\nu(u_{i,j}^n+u_{j,i}^n)_{,j}=0 \quad (5)$$

$$u_{i,i}^{n+1} \;=\; 0 \quad (6)$$

ここで、さらに (5) 式の両辺に発散を取り、(6) 式の連続条件を代入すると、次の圧力のポアソン方程式が得られる。

$$p_{,ii}^{n+1} \;=\; \frac{\rho}{\Delta t}u_{i,i}^n-\rho u_{j,i}^n u_{i,j}^n-\rho u_j^n u_{i,ij}^n+\mu(u_{i,j}^n+u_{j,i}^n)_{,ij} \quad (7)$$

結局、この手法の計算手順とは、(7) 式のポアソン方程式を解いて圧力場 p^{n+1}を計算し、p^{n+1}を (5) 式へ代入して速度場 u_i^{n+1}を求めるということになる。

2-2．　空間方向離散化

本手法の特徴は空間方向の離散化にある。前述の (5)，(7) 式に有限要素法を適用し、空間方向の離散化を行う。重み関数をそれぞれ p^*，u_i^* とし、解析領域 V で積分すると、以下に示す重み付き残差方程式が得られる。まず、(7) 式は、

$$\int_V p^* p_{,ii}^{n+1}dV \;=\; \frac{\rho}{\Delta t}\int_V p^* u_{i,i}^n dV - \rho\int_V p^* u_{j,i}^n u_{i,j}^n dV-\rho\int_V p^* u_j^n u_{i,ij}^n dV + \mu\int_V p^*(u_{i,j}^n+u_{j,i}^n)_{,ij}dV \quad (8)$$

(8) 式の左辺を部分積分すると、

$$\int_V p^* p_{,ii}^{n+1}dV \;=\; \int_S p^* p_{,i}^{n+1}n_i dS \;-\; \int_V p_{,i}^* p_{,i}^{n+1}dV \quad (9)$$

ここで、(9) 式の右辺第一項内の圧力のノーマル方向微分を (5) 式から求めることを考える。すなわち、

$$p_{,i}^{n+1}\cdot n_i = -\rho\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+u_j^n u_{i,j}^n+\nu(u_{i,j}^n+u_{j,i}^n)_{,j}\cdot n_i \quad (10)$$

これを (9) 式へ代入し、さらに (8) 式の左辺に代入し、また (8) 式の右辺第一項と第二項を除く全ての項に部分積分を施す。このとき、右辺の粘性項は３階微分の微小項であるからこれを省略し整理すると次の式が得られる。

$$\int_V p_{,i}^* p_{,i}^{n+1}dV \;=\; -\frac{\rho}{\Delta t}\int_V p^* u_{i,i}^n dV -\rho\int_V p_{,i}^* u_j^n u_{i,j}^n dV -\rho\int_S p^*\left(\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}\right)\cdot n_i dS \quad (11)$$

これにより，圧力のポアソン方程式に関する第二種境界条件は (11) 式右辺第三項の形で与えられ，取扱い易い形となる。

一方、(5) 式の重み付き残差方程式は次になる。

$$\int_V u_i^* u_i^{n+1}dV \;=\; \int_V u_i^* u_i^n dV - \Delta t[\int_V u_i^* u_j^n u_{i,j}^n dV$$

$$-\frac{1}{\rho}\int_V u^*_{i,i}p^{n+1}dV + \nu\int_V u^*_{i,j}(u^n_{i,j}+u^n_{j,i})dV$$

$$+\frac{1}{\rho}\int_S u^*_i\{-p^{n+1}\delta_{ij}+\mu(u^n_{i,j}+u^n_{j,i})\}\cdot n_j dS\ ] \qquad (12)$$

以上の重み付き残差方程式から有限要素方程式を導くと、次になる。

$$A_{\alpha i\beta i}p^{n+1}_{\beta} = -\frac{\rho}{\Delta t}H_{\alpha\beta i}u^n_{\beta i} - \rho K_{\alpha i\beta\gamma j}u^n_{\beta j}u^n_{\gamma i} - \hat{\Omega}_{\alpha i} \qquad (13)$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta}u^{n+1}_{\beta i} = \bar{M}_{\alpha\beta}u^n_{\beta i} - \Delta\{K_{\alpha\beta\gamma j}u^n_{\beta j}u^n_{\gamma i} - \frac{1}{\rho}H_{\alpha i\beta}p^{n+1}_{\beta} + \nu S_{\alpha i\beta j}u^n_{\beta j} - \hat{\Sigma}^{n+1}_{\alpha i}\} \qquad (14)$$

３． ３次元キャビティ内流れの解析

本手法の３次元問題への適用性の検証として、図１に示す領域を用い３次元キャビティ内部の強制対流の解析を行った。解析に使用した有限要素分割は20*20*20 の均一な有限要素分割であり、有限要素は立方体１次要素を用いた。解析は Reynolds 数を100とし、上面（z=1）で u=1を与え、その他の面で u_i=0 とした。また圧力の基準値として、原点に $p = 0$ を与えた。計算結果を図２－６に示す。

４． おわりに

非圧縮粘性流体の３次元解析のひとつとして、分離型法による３次元キャビティ内流れの解析を行った。計算結果は実際の現象を非常に良く再現しており、本手法の適用性は証明されたと思われる。今後は、工学への応用に役立つような複雑な領域での解析を行い、本手法の有効性を検討して行きたい。

＜参考文献＞

[1] 畑中勝守，川原睦人；”流速修正法による熱対流有限要素解析”，土木学会第４３回年次講演会概要集第２部，pp.504-505，1988

[2] 畑中勝守，川原睦人；”２次元自由表面問題の有限要素解析”，土木学会第４４回年次講演会概要集第２部，pp.602-603，1989

[3] 畑中勝守，林正宏，川原睦人；”非圧縮粘性流体の有限要素解析”，第３９回応用力学連合講演会予稿集，pp.213-216，1989

[4] 林正宏，川原睦人；”分離型法を用いた非圧縮粘性流体の有限要素解析”，土木学会第４４回年次講演会概要集第２部，pp.604-605，1989

[5] 畑中勝守，川原睦人；”分離型法による自然対流有限要素解析”，第３回数値流体力学シンポジウム講演論文集，pp.391-394，1989

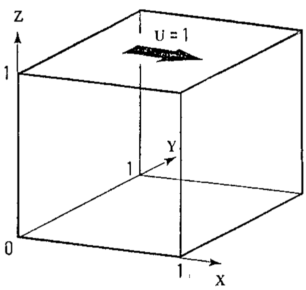

図１ 解析領域

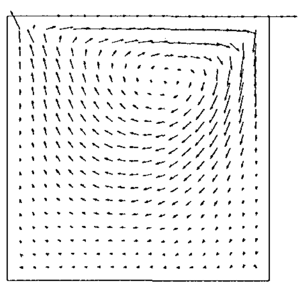

図２ 流速ベクトル
（x-z 平面，y=0.5）

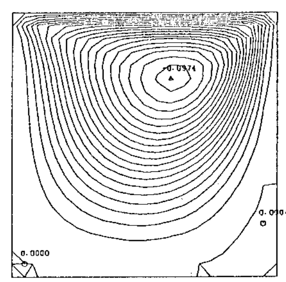

図３ 流れ関数
（x-z 平面，y=0.5）

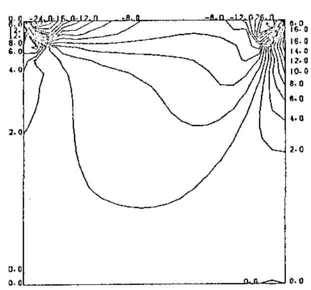

図４ 渦 度
（x-z 平面，y=0.5）

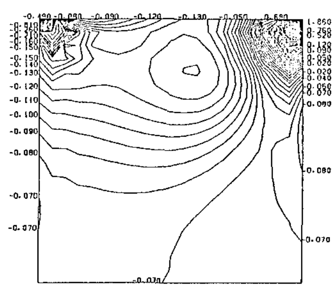

図５ 圧 力
（x-z 平面，y=0.5）

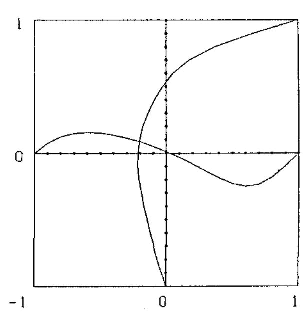

図６ 断面中心での流速分布
（x-z 平面，y=0.5）