

II-258

定常 Navier-Stokes 方程式の有限要素法解析における要素の選択について

中央大学 学生員 石毛立也

中央大学 正 員 川原睦人

1. はじめに

混合補間法は、有限要素法流体解析において非常に早くから研究されてきている手法のひとつである。この手法で用いられる三角形要素を同じ条件で計算時間、計算機容量、精度の観点から比較した報告は少なく、どの要素が実用的であるか明確にされていないのが現状である。そこで、本研究ではこれらの三角形要素の比較検討を定常非線形問題を通して行い、それぞれの三角形要素の特質を明確にするものである。

2. 基礎方程式および境界条件

基礎方程式として、(1) 式の Navier-Stokes 方程式と (2) 式の連続式を用いる。 u_i は x_i 軸方向の流速成分、 p は圧力、 ρ は密度、 ν は動粘性係数、 f は外力を表す。また、添字は総和規約に従うものとする。(3)、(4) 式は、境界条件であり、解析する流れの場全体を V 、その境界を S とする。境界 S は、流速の規定される境界 S_1 と表面力の規定される境界 S_2 で構成される。 δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり、 n_j は境界に立てた法線方向余弦である。また、 $\hat{\cdot}$ は境界上で規定された値を示す。

$$u_j u_{j,i} + \frac{1}{\rho} p_{,i} - \nu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = f_i \quad (1) \quad u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } S_1 \quad (3)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (2) \quad \left\{ -\frac{1}{\rho} p \delta_{ij} + \nu (u_{i,j} + u_{j,i}) \right\} n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } S_2 \quad (4)$$

3. 三角形要素

従来より、混合補間法は、流速の補間関数は圧力の補間関数より1次以上高くなければならないことは知られている。本研究では、比較検討を行うために、図-1のような5通りの三角形要素を用いる。ただし、P1b-P1要素、P2b-P1要素、P2b-P0要素は、要素の重心の位置に新しく流速の節点を設け、内部を高次の気泡関数(Bubble Function)により補間させた要素である。また、P2-P0要素、P2b-P0要素は、圧力が要素内で一定となり、解析領域全体で不連続になる要素である。

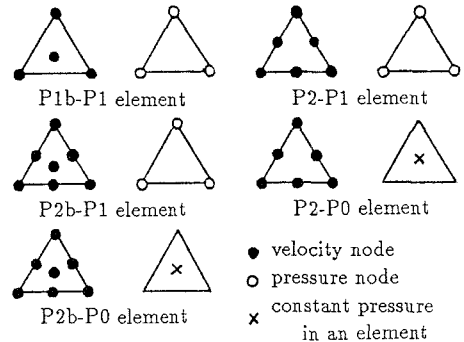


図-1 三角形要素

4. 有限要素法の適用

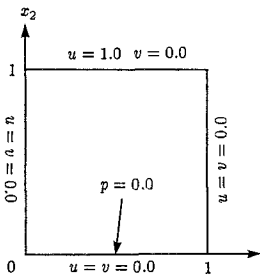
非線形方程式(1)に対しては、繰り返し計算法である Newton-Raphson 法を適用する。そこで、(5)、(6) 式のようにおく。これらを(1)、(2) 式に代入して、有限要素法により離散化を施し、 $\Delta u_{\alpha i}$ 、 Δp_{λ} の1次項のみをとると、(7) 式の様な有限要素方程式を得る。(7) 式の左辺の係数行列と右辺の既知項は、第 n 回目の $u_{\alpha i}^n$ と p_{λ}^n で計算することができる。これより補正量 Δu_{β} 、 Δv_{β} 、 Δp_{λ} が求まるので、(5)、(6) 式に代入すれば第 $n+1$ 回目の値が得られる。補正量 Δu_{β} 、 Δv_{β} 、 Δp_{λ} が許容誤差範囲内になるまで繰り返し計算を行う。また、収束を早めるために定常線形方程式で求めた値を初期値とする。

$$u_{\alpha i}^{n+1} = u_{\alpha i}^n + \Delta u_{\alpha i} \quad (5) \quad \begin{bmatrix} G_{\alpha\beta}^x & L_{\alpha\beta}^y & -H_{\alpha\lambda}^x \\ L_{\alpha\beta}^x & G_{\alpha\beta}^y & -H_{\alpha\lambda}^y \\ -H_{\beta\mu}^x & -H_{\beta\mu}^y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_{\beta} \\ \Delta v_{\beta} \\ \Delta p_{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{F}_{\alpha}^x \\ \bar{F}_{\alpha}^y \\ \bar{J}_{\mu} \end{bmatrix} \quad (7)$$

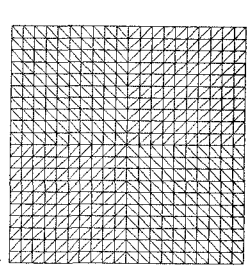
5. 数値解析例

数値解析例として、2次元正方形キャビティ内流れの解析を行った。境界条件は図-2であり、有限要素分割は図-3の通りである。動粘性係数 $\nu = 0.01$ 、レイノルズ数は100である。許容誤差範囲は、0.001以下とした。図-4～図-13は、P1b-P1、P2-P1、P2b-P1、P2-P0、P2b-P0要素の流速図、圧力図

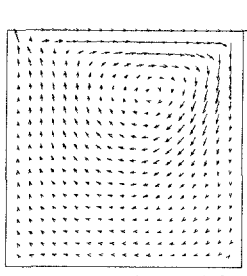
である。表－1の計算時間と計算機容量は、P2-P1要素を1.00とした時の値である。また、これらの測定においては、東大大型計算機センターのHITAC M-680を使用した。



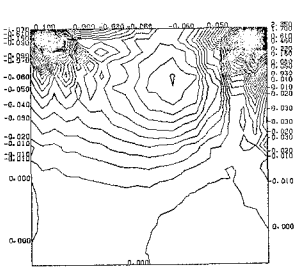
図－2 境界条件



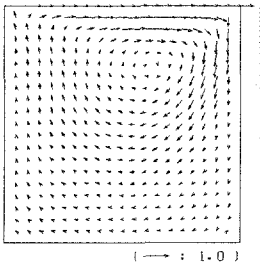
図－3 有限要素分割



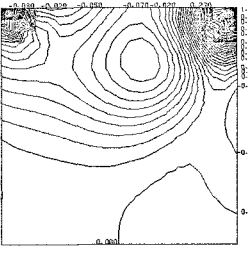
図－4 P1b-P1要素の流速図



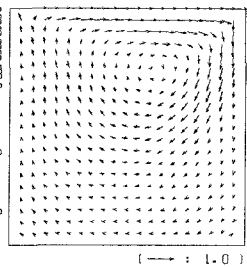
図－5 P1b-P1要素の圧力図



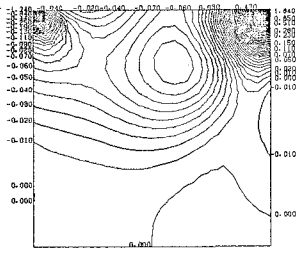
図－6 P2-P1要素の流速図



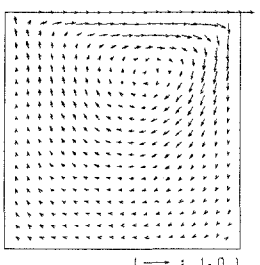
図－7 P2-P1要素の圧力図



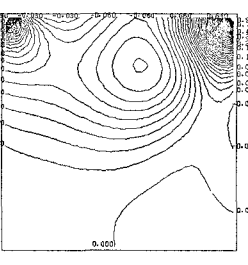
図－8 P2b-P1要素の流速図



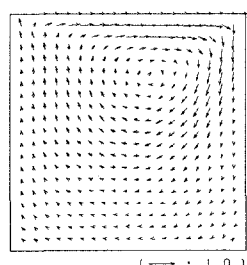
図－9 P2b-P1要素の圧力図



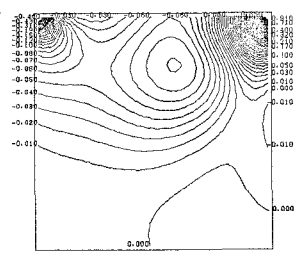
図－10 P2-P0要素の流速図



図－11 P2-P0要素の圧力図



図－12 P2b-P0要素の流速図



図－13 P2b-P0要素の圧力図

要素	P1b-P1	P2-P1	P2b-P1	P2-P0	P2b-P0
繰り返し回数	4回	4回	4回	5回	5回
計算時間の比	0.52	1.00	3.86	5.94	11.6
計算機容量の比	0.5	1.00	1.39	9.21	12.1

表－1. 計算時間と計算機容量の比較

6. おわりに

数値解析例を通して、得られた知見をまとめると以下ようになる。(1) 流速について他の数値解析手法と比較した結果、検証の対象としている全ての要素において良い一致をみた。(2) 流速と圧力に1次の同次な補間関数を用いた要素において、流速に気泡関数を付加することにより次数を離れたP1b-P1要素では、高次の補間を行う他の要素に比べて、計算時間、計算機容量の点で有利であるが、圧力において一部でチェッカーボード状の不安定現象が見られた。(3) 流速について2次の補間関数に気泡関数を付加して自由度を増したP2b-P1,P2b-P0要素と気泡関数を付加しないP2-P1,P2-P0要素を比較した結果、相違は確認されなかった。(4) 圧力が要素内で一定であるP2-P0,P2b-P0要素は、圧力の補間関数が線形であるP2-P1,P2b-P1要素に比べて圧力について精度の高い結果を得ることができた。しかし、繰り返し回数や計算過程において不安定な要因が見られる。

参考文献

1)D.N.Arnold, F.Brezzi and M.Fortin; A Stable Finite Element for The Stokes Equations, Calcolo 23 (4), pp.337-344, 1984. 2) 石毛立也, 川原隼人; 有限要素法の補間関数についての一考察, 第44回土木学会年講, 1989