

II-249 水路急転部における高速流の挙動について

京都大学大学院○学生員 米山 望
京都大学工学部 正 員 岩佐義朗
京都大学工学部 正 員 細田 尚

1. はじめに; 本研究は、定常状態における急勾配水路急転部の流れに対して特性曲線法を適用することにより、現象の再現を試みたものである。まず、水際線(水深がゼロになる境界線)の取扱について考察し、その後従来の実験結果と数値解析結果を比較・検討しその妥当性を検証する。

2. 基礎式; 定常状態における平面二次元流れの基礎式を用いる。それは、図1に示す座標系を用いて次のように行列表示される。

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U}{\partial z} = B \quad (1)$$

上式において、 U, A_1, A_2, B は、次のように表せる。

$$U = \begin{bmatrix} h \\ u \\ w \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} w & 0 & h \\ 0 & w & 0 \\ g & 0 & w \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ g \sin \theta - \tau_{bx}/\rho h \\ -\tau_{bz}/\rho h \end{bmatrix}$$

ここに(u, w);水深平均流速の x, z 成分、 h ;水深、(τ_{bx}, τ_{bz});水路床に作用する応力ベクトルの成分、 ρ ;水の密度、 g ;重力加速度、 θ ;水路床勾配である。

(1)式の特性曲線 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は、 $A_1^{-1}A_2$ の固有値であり次のようになる。(λ_1 は流線を表す。)

$$\lambda_1; \frac{dz}{dx} = \frac{w}{u} \quad \lambda_2; \frac{dz}{dx} = \frac{uw + \sqrt{gh(u^2 + w^2 - gh)}}{u^2 - gh} \quad \lambda_3; \frac{dz}{dx} = \frac{uw - \sqrt{gh(u^2 + w^2 - gh)}}{u^2 - gh} \quad (2)$$

また、 $\lambda_i (i=1, 2, 3)$ の左固有ベクトルを μ_i とし、(1)式に左から $\mu_i A_1^{-1}$ を乗ずれば、特性曲線上の関係式(3)が導かれる。¹⁾

$$\mu_i \left(\frac{\partial U}{\partial x} + A_1^{-1} A_2 \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \mu_i \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \mu_i A_1^{-1} B \quad (i=1, 2, 3) \quad (3)$$

3. 解の構成と水際線の取扱い; 路床勾配、底面せん断応力を無視した場合を例にとって、特性曲線法における水際線の取り扱い、および解の構成について説明する。まず、 λ_1 (流線)上の関係式は、上流端で流速、水深が一定のとき、流れの全領域で成立する(4)式となる。

$$(u^2 + w^2)/2g + h = H_0 \quad (H_0; \text{上流端の比エネルギー}) \quad (4)$$

(4)式のもとに、解は特性曲線 λ_1, λ_2 の交点において定められる。 λ_2 および λ_3 で構成される特性曲線網を示したのが図3であって、この図より流れはI, II, IIIの三通りに分けられる。すなわち、Iは上流端の水深および流速が変化しない領域、IIは点Bから放射状に出る特性曲線(λ_3)上で水深および流速が一定となる領域、さらに、IIIは点Bから出た特性曲線が x 軸(水路中心軸)で反射したものと、点Bから出た特性曲線の交点として水量が定まる領域である。次に、水際線上の点Dの水量が λ_2 上の関係式と(4)式から定められることを説明しよう。

まず、図3の特性曲線網を(u, w)平面に変換する。すなわち、 λ_2 上の関係式を $V = \sqrt{u^2 + w^2}$ 、 $u = V \cdot \sin \theta$ 、 $w = V \cdot \cos \theta$ と

(4)式を用いて変数変換すれば、

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\theta} = - \frac{\sqrt{H_0 - V^2/2g}}{3V^2/2g - H_0} \quad (5)$$

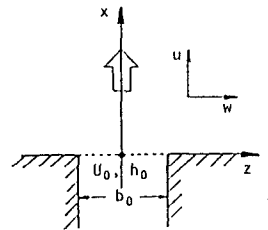


図1 座標系

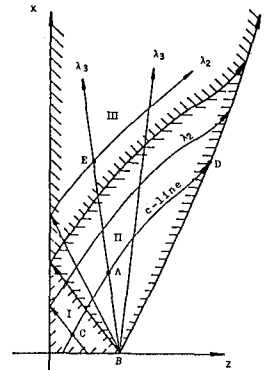


図2 特性曲線網

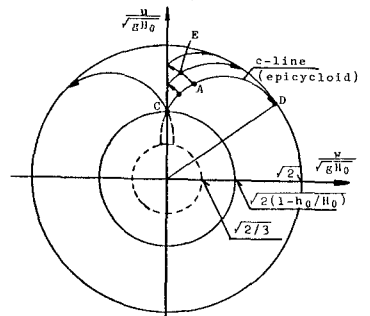


図3 (u, w)面上での特性曲線の挙動

となる。(4)式の解(エプサイクロイド曲線)を用いて(u, w)平面に変換すれば図4のようになる。図3の点Cから出発する λ_2 の行方を(u, w)平面でみると、水際線上の点D((4)式に $h=0$ を代入した円 $u_2+w_2=2gH_0$ 上に存在する。)で止まることがわかる。すなわち点Dの水理量は λ_2 上の関係式と流線上の関係式である(4)式によって定められることがわかる。

4. 数値解析方法; 数値解析は、3. で述べたことを念頭において、(3)式を適当に離散化することにより行われる。 $x=k \cdot \Delta x = x_k$ 上の格子点の水理量が既知のとき、 $x=x_{k+1}$ 上の未知の格子点Pと点Pを通る3本の特性曲線の $x=x_k$ 上の点を $Q_i(i=1, 2, 3)$ とすると、 U_p は次式で求められる。ただし、 Q_i の位置と水理量の値 U_{Q_i} は、線形補間によって定めた(図4)。

$$\lambda_i; (\mu_i)_{Q_i} \cdot \left(\frac{U_P - U_{Q_i}}{\Delta x} \right) = (\mu_i A_1^{-1} B)_{Q_i} \quad (i=1, 2, 3) \quad (6)$$

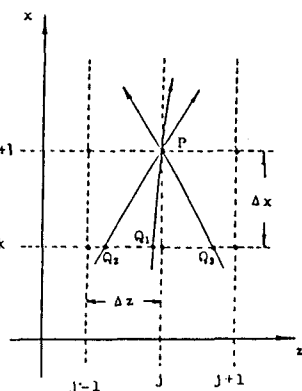


図4 離散化の方法

計算領域の上流端 $x/(b_0/2)=0.25$ では、底面せん断応力、路床勾配を無視したときの解析解より得られる流速、水深を与えた。水路中心線上では $w=0$ となり、 u, h が λ_1, λ_3 上の関係式から求められる。また、水際線上では3. で述べたことから、流線(λ_1)上の関係式と水際線で止まる λ_2 上の関係式で流速 u, w が求まる。このとき、底面せん断応力を無視する場合には、水際線上で $h=0$ とおき、底面せん断応力の評価にManning則を適用したときには、微小水深 h_0 を与えた。

5. 計算結果の考察; 計算条件はRouse²⁾の実験に合せてあり、表1に示したようである。路床勾配、底面せん断応力を無視したRun1における水深の三次元分布を図5に示した。

水深の横断分布についてRouseの実験と比較したのが図6であって、両者はほぼ一致している。

表1 計算条件

	Fr_0	$(b_0/2)/h_0$	$gn^2/h_0^{1/3}$	h_e/h_0
Run 1	2	—	—	—
Run 2-1	2	1	1.68×10^{-3}	0.1
2	2	2	2.11×10^{-3}	0.1
3	2	4	2.66×10^{-3}	0.1

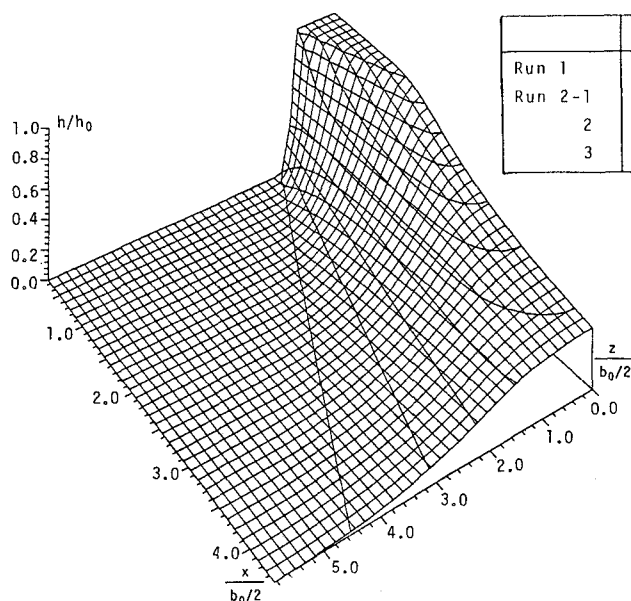


図5 水深の三次元分布(Run1)

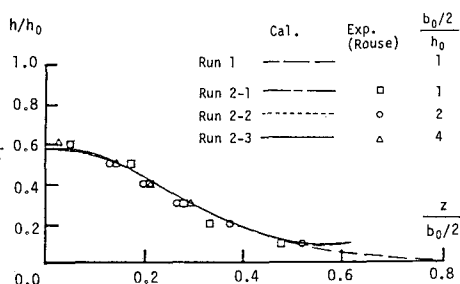


図6 Rouseの実験との比較
($x/(b_0/2)=3$)