II-194　一様でない水路に限界流が生ずる場合の境界特性ついて

協和技研株式会社　正員　浅野　優

1　はじめに

本研究は一様でない水路の遷移形式において一定の区間が限界流になる場合が考えられるが、この場合の水路の粗度、水路床勾配、水路幅の変化率等（以下、境界特性という。）[1)~3)]の間の関係について、一般断面形及び具体の断面形について総合的な考察を試み漸変流に対処する実務上の指針を得ることを目的とする。

水路幅等（長方形では幅(b) ２次放物線形では断面定数(p)[6)] 三角形では側壁法勾配(s) 以下形状要素(K)という。）が変化する水路の遷移点における擬似等流水深曲線と限界水深曲線（以下、両曲線という。）の交点において、「両曲線が接触して切り合う」場合を考え、これが成立する場合の条件から境界特性の関係式を求め、さらに、一定の区間その形状要素の変化に応じて限界流が生ずる遷移形式の境界特性の関係式を併せ求めた。なお、この場合の遷移流のトポロジー的分類上の位置付けも試みた。

2　基本となる基礎方程式（支配断面の水理）[1)~6)]

２－１簡単のため流下方向に流出、流入流量のない不浸透性の水路とすると２曲線は、それぞれ次のように陰関数の形であらわされる。なお、記号については参考文献[5)]に従っており省略する。

$$i-n^2Q^2/R^{4/3}A^2+\alpha Q^2/gA^3\cdot\partial A/\partial x=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$i-\alpha Q^2/gA^3\cdot\partial A/\partial h=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

２－２　上記２曲線の交点における遷移水面形曲線の水面勾配は極限演算により次のように示される。

$$a(dh/dx)^2+2b(dh/dx)+c=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

ここで (i)を定数とし上式の各係数を求めると次式になる。

$$a=3/A\cdot(\partial A/\partial h)-(\partial^2A/\partial h^2)/(\partial A/\partial h) \quad\cdots\cdots(3-a)$$

$$2b=6/A\cdot(\partial A/\partial x)-2(\partial^2A/\partial h\partial x)/(\partial A/\partial h)+\partial(n^2Q^2/R^{4/3}A^2)/\partial h \quad\cdots\cdots(3-b)$$

$$c=\partial(n^2Q^2/R^{4/3}A^2)/\partial x+3/A\cdot(\partial A/\partial x)^2/(\partial A/\partial h)-(\partial^2A/\partial x^2)/(\partial A/\partial h) \quad\cdots\cdots(3-c)$$

3　両曲線が接触する条件から得られる関係式

３－１　水深が等しい条件から得られる関係式は両方の流水断面積が等しいとして(1)及び(2)式を連立方程式として解きAを消去すると次式を得る。これより断面形別に(dK/dx) を導いた結果を次頁表中に示す。

$$(\partial A/\partial x)=(n^2Q^2/R^{4/3}A^2-i)(\partial A/\partial h) \quad\cdots\cdots(4)$$

同様に両方の水深が等しいとしてh を消去し断面形別に(dK/dx)を求め 次頁表中式(5) として示す。

３－２ 第１次微分係数（両曲線が交点でもつ勾配）が等しい条件より得られる関係式

３－２－１　擬似等流水深曲線の微分係数$(dh/dx)_o$は(1)式より微分係数を求めると次式を得る。

$$(dh/dx)_o=-\{-\partial(n^2Q^2/R^{4/3}A^2)/\partial x+\alpha Q^2/gA^4\cdot[(\partial^2A/\partial^2x)A-3(\partial A/\partial x)^2]\}/\{-\partial(n^2Q^2/R^{4/3}A^2)/\partial h$$
$$+\alpha Q^2/gA^4\cdot[(\partial^2A/\partial h\partial x)A-3(\partial A/\partial h)(\partial A/\partial x)]\} \quad\cdots\cdots(6)$$

３－２－２　限界水深曲線の微分係数$(dh/dx)_c$は(2)式より微分係数を求めると次式を得る。

$$(dh/dx)_c=-[(\partial^2A/\partial x\partial h)A-3(\partial A/\partial h)(\partial A/\partial X)]/[(\partial^2A/\partial h^2)A-3(\partial A/\partial h)^2] \quad\cdots\cdots(7)$$

３－２－３　流水断面積Aの$(\partial^2A/\partial x)$の値は上記両曲線の微分係数が等しいとして(6)、(7)式を連立方程式として解き次式より得る。これより断面形別に(k)の(d^2K/dx^2)を導いた結果を次頁表に式(8)として示す

$$(\partial^2A/\partial x^2)=(dh/dx)_c\{-\partial(n^2Q^2/R^{4/3}A^2)/\partial h+[(\partial^2A/\partial h\partial x)-3(\partial A/\partial h)(\partial A/\partial x)]/A(\partial A/\partial h)\}(\partial A/\partial h)$$
$$+\partial(n^2Q^2/R^{4/3}A^2)/\partial X\cdot(\partial A/\partial h)+3(\partial A/\partial x)^2/A \quad\cdots\cdots(8)$$

4　遷移水面形曲線の水面勾配

遷移水面形曲線の水面勾配は(8)式の値を(3-c)の$(\partial^2A/\partial x^2)$に代入のうえ(3)式より２値を得る。この値を

断面形別に次表に示す。なお、そのうちの負値$(dh/dx)_1$の方が前出の(7)式$(dh/dx)_c$と同値になる。

5　一定の区間が限界流になる場合の関係式

一定の区間が限界流になる場合を表す関係式は、(5)及び(8)式の解として形状要素の流下方向(x)についての関数形を得たので断面形別に次表に式(9)として示す。

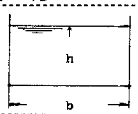
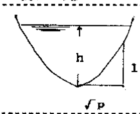
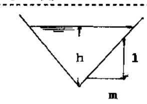
6　限界流のトポロジー的分類[1)3)]

限界流のトポロジー的分類に必要な (i/i_c)と(m)との関係を知るのには 無次元量を表す次の式からでも得ることが出来る。断面形別にChezyの流れでそれを求めた結果を次表で式(10)関係として示す。

$$m=3h^2(\partial^2 b/\partial x)/bi^2 \quad \cdots\cdots (10)$$

7　断面形別境界特性の関係式

考察の対象とする断面形は、限界水深が陽関数で表すことができる長方形、放物線形及び三角形の３種類形とし、いずれも形状要素が大で水面幅が十分広く$R=A/B$と近似できるものとする。従って局所的な限界勾配(i_c)は$(g/\alpha C^2)$ となる。なお Chezyの係数 C $(C=R^{1/6}/n)$さらには i を定数としている。

式番号、名称等	長　方　形	放　物　線　形	三　角　形
流水断面積　A	bh 	$4/3\cdot p^{1/2}h^{3/2}$ 	sh^2 
水面幅　$\partial A/\partial h(=B)$	b	$2(ph)^{1/2}$	$2sh$
水理水深　A/B	h	$2/3\cdot h$	$h/2$
式 (1)	$i-Q^2/C^2h^3b^2+\alpha Q^2/gb^3h^2\cdot(db/dx)=0$	$i-27Q^2/C^2 32ph^4+9\alpha Q^2/32gp^2h^3\cdot(dp/dx)=0$	$i-2Q^2/C^2sh^3+\alpha Q^2/gs^3h^4\cdot(ds/dx)=0$
式 (2)	$1-\alpha Q^2/gb^2h^3=0$	$1-27\alpha Q^2/32gph^4=0$	$1-2\alpha Q^2/gs^2h^5=0$
式 (4)	$db/dx=(i_c-i)b/h$	$dp/dx=3(i_c-i)p/h$	$ds/dx=2(i_c-i)s/h$
式 (5)$dk/dx=f(k)$	$db/dx=(i_c-i)(g/\alpha Q^2)^{1/3}b^{5/3}$	$dp/dx=3(i_c-i)(32/27\cdot g/\alpha Q^2)^{1/4}p^{5/4}$	$ds/dx=2(i_c-i)(g/2\alpha Q^2)^{1/5}s^{7/5}$
式 (8) $d^2k/dx^2=f(k)$	$d^2b/dx^2=5/3\cdot 1/b\cdot(db/dx)^2$	$d^2p/dx^2=5/4\cdot 1/p\cdot(dp/dx)^2$	$d^2s/dx^2=7/5\cdot 1/s\cdot(ds/dx)^2$
式 (9) $k=k(x)$ (但し、D：積分定数)	$b=\{-(2/3)[(i_c-i)(g/\alpha Q^2)^{1/3}x+D]\}^{-3/2}$	$p=\{-(1/4)[3(i_c-i)(32/27\cdot g/\alpha Q^2)^{1/4}x+D]\}^{-4}$	$s=\{-(2/5)[2(i_c-i)(g/2\alpha Q^2)^{1/5}x+D]\}^{-5/2}$
式 (3)の解その１	$(dh/dx)_1=-2/3\cdot(i_c-i)$	$(dh/dx)_1=-3/4\cdot(i_c-i)$	$(dh/dx)_1=-4/5\cdot(i_c-i)$
式 (3)の解その２	$(dh/dx)_2=1/3\cdot(i_c+2i)$	$(dh/dx)_2=1/4\cdot(i_c+3i)$	$(dh/dx)_2=1/5\cdot(i_c+4i)$
式 (10)関係	$(i/i_c)=1\pm(m/5)^{1/2}$	$(i/i_c)=1\pm(m/10.125)^{1/2}$	$(i/i_c)=1\pm(m/16.8)^{1/2}$

8　おわりに

上記表の中には既に知られているものも含まれるが、このうちの(5),(8),(9)３式の一連の関係及び式(3)の解は一定の区間に限界流が生ずる特定の遷移形式の場合の境界特性を示している。又、遷移形式のトポロジー的分類は長方形について $(i/i_c)-m$ 面上、鞍形点、結節点の何ずれにも属しないことを確かめたが、これは他の断面形についても同じであることを示唆しているものと考えられる。従って本文で明らかにされた限界流の遷移形式の境界特性は漸変流の中核的な事項で、実務上の指針として有用なものと考えられる。

参考文献　１）玉井信行：水理学１、培風館 pp,121~130、1989
２）岩佐義朗：水理学、朝倉書店 pp,146~148、1967
３）岩佐義朗：幅の漸変する水路における水流の遷移現象と境界特性との関連に関する理論的研究、土木学会　論文集　第59号・別冊(3-1), 1958
４）土木学会：水理公式集、pp,1 ~18, 1985　　５）前出 ４）pp 11
６）本間　仁：水理学－技術者のための流体の力学－、丸善 pp 65, 129, 143~146、1967