土木学会第45回年次学術講演会（平成２年９月）

II-193 保存則系差分法のスキームの特性に関する考察

岐阜大学　学生員　潮田智道
岐阜大学　正　員　河村三郎
岐阜大学　正　員　中谷　剛

１．はじめに

急勾配で、段落ち部、勾配の急変部を有するなど変化に富む山地丘陵部の流路工内における洪水流は、常・射流の混在、随所での跳水の発生を伴うなど複雑な様相を呈する。このような流れを考えるとき、特異点に対する特別な配慮が不必要な保存則系差分法が有望視され、最近、いくつかの計算例も報告されている。本研究では、代表的な２つの差分ｽｷｰﾑである2段階Lax-Wendroff法とMacCormack法を用いてそれらの適用性について、比較検討を行った。また、時間進行法による水面形計算を試みたので報告する。

２．不連続を含む領域における差分解について

跳水部などで問題となる不連続部の解の性質を調べるため、次式で示されるBurgers方程式のstep波解を、MacCormack法と2段階Lax-Wendroff法で求めた。

$$u_t + f_x = 0, \qquad f = u^2/2, \qquad (x>0) \tag{1}$$

$$u_o = 1.0 \ (x<25), \quad u = 0 \ (x>25) \tag{2}$$

その結果をそれぞれ、図１、図２に示した。CFL数が小さい場合には、2次精度のｽｷｰﾑに随伴する特性として、得られた弱解の不連続部の前後において数値振動が発生しており、打ち切り誤差に含まれる三階微分の項の持つ分散効果が著しく顕在化した様子を見ることができる。また、2段階Lax-Wendroff法の方がMacCormack法よりも数値振動が著しい傾向がある。CFL数が大きくなるとこの数値振動は小さくなり、CFL条件の操作により数値振動を制御できることを示唆している。

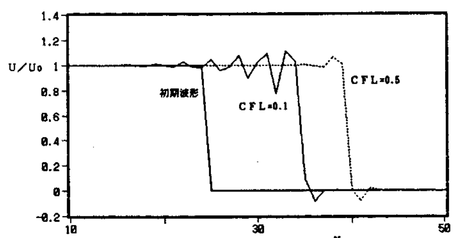

図１　不連続部におけるｽｷｰﾑの特性
(MacCormack法)

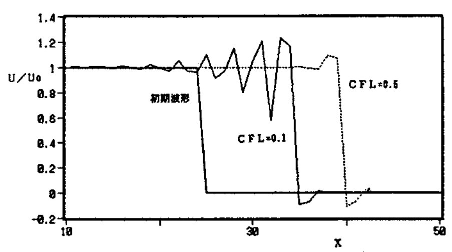

図２　不連続部におけるｽｷｰﾑの特性
(2段階Lax-Wendroff法)

３．非定常現象に対する差分解と解析解との比較

解析解の存在する場合として、無限に広い平行な固定平板と振動平板の間に満たされた粘性流体の流速分布を考える。このときの基礎方程式は、

$$u_t + f_y = 0, \qquad f = -\nu(\partial u/\partial y) \quad (y>0) \tag{3}$$

$$y \to \infty : u = 0, \quad y = 0 : u = u_o \cos \sigma t \tag{4}$$

となる。図３、図４にMacCormack法と2段階Lax-Wendroff法による計算結果と解析解の比較を示した。この計算例では約2秒後には両ｽｷｰﾑとも解析解との良好な一致を示している。したがって、数値計算を行うときの初期条件が必ずしも解析解を満たしていなくても、十分時間が経過した後の数値解は、解析解と一致すると考えられる。また、この計算例ではMacCormack法の法が早く解析解に収束した。

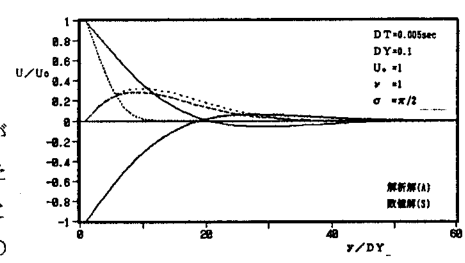

図３　非定常現象に対するｽｷｰﾑの特性
(MacCormack法)

４．勾配急変部の水面形計算と時間格子間隔の影響

水路勾配が1/100から水平へと急変する水路の水面形計算を

MacCormack法と2段階Lax-Wendroff法で行った。水路幅は40cmとし、上流端で定常流量0.006m³/secを与え、下流端で限界水深が生じるとした。この場合、いずれのｽｷｰﾑでも跳水部で数値振動を発生するが、Burgers方程式のstep波解から予想されるほど著しいものではなかった。図５に示すように、2段階Lax-Wendroff法では、時間進行法による定常解が時間格子間隔⊿ｔに依存することが明らかとなった。したがって、2段階Lax-Wendroff法により、時間進行法で定常解を求める場合には、⊿ｔの選択に注意する必要がある。MacCormack法ではこのような傾向はみられず、この点はMacCormack法の方が実用上有利であると考えられる(MacCormack法による計算では、図５の⊿ｔ=0.09secの場合と一致した)。

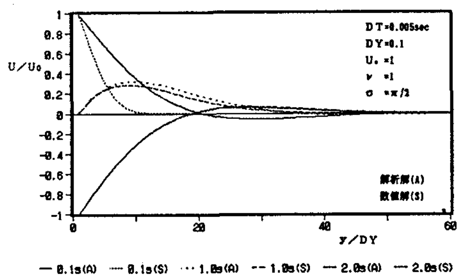

図４　非定常現象に対するｽｷｰﾑの特性
(2段階Lax-Wendroff法)

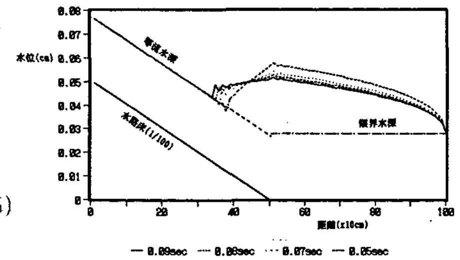

図５　時間格子間隔⊿ｔの影響
(2段階Lax-Wendroff法)

５．階段状床固工群を有する水路の水面形計算例

次の保存則形の１次元運動方程式と連続式

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{P}{\rho}\right)_b+\frac{Q^2}{A}\right]=gA\left[i-\frac{n^2Q|Q|}{A^2R^{4/3}}\right] \tag{5}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{6}$$

に、2段階Lax-Wendroff法及びMacCormack法を適用する。ただし、両端境界に対してはBox法を採用し、連続式のみを満足させることにする。また、2段階Lax-Wendroff法に対しては、式(5)の右辺に対し部分的に格子を半ｽﾃｯﾌﾟ進め安定性を増す方法[1]を採用する。なお、2段階Lax-Wendroff法ではRichtmyerのｽｷｰﾑを、MacCormack法では、予測子段階で後退差分を、修正子段階で前進差分を用いた[2]。また、段落ち部では、摩擦及び勾配の影響を無視している。図６、図７に両ｽｷｰﾑによる計算例を示した。2段階Lax-Wendroff法では、応用上致命的なものではないものの不連続部において数値振動が発生している。MacCormack法では、実験値に対してより良好な一致が見られる。また、数値振動はほとんど見られない。

６．おわりに

本研究では，2段階Lax-Wendroff法，及びMacCormack法による差分ｽｷｰﾑの特性の比較を行った。山地流路工の洪水時における水面形の計算で問題となる、跳水を含む定常流及び階段状床固工群を有する水路の計算法として、これらの方法が有効であることが確認できた。特に、時間進行法による定常解の計算に対しては、MacCormack法が有利であると考えられる。跳水・急拡・段落ち部などでは、局所流が重要となるため、今後は多次元化によりさらに適用性を高める必要がある。

参考文献：1)伊藤剛，数値計算の応用と基礎，pp.89-99,ｱﾃﾈ出版．2)日本機械学会編，流れの数値ｼﾐｭﾚｰｼｮﾝ，pp.99-110,ｺﾛﾅ社．

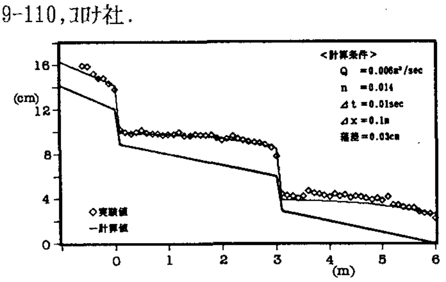

図６　床固め工を有する水路の水面形計算例
(MacCormack法)

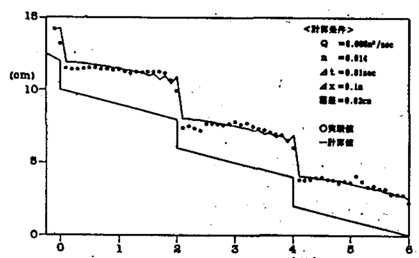

図７　床固め工を有する水路の水面形計算例
(2段階Lax-Wendroff法)