

II-192 不等流水面形計算の精度について

山梨大学大学院 学生員 奥村幹夫
山梨大学工学部 正会員 荻原能男
山梨大学工学部 正会員 宮沢直季

1. はじめに

開水路不等流計算の方法は、Bresseの方法等にみられるように、数表を用いて計算するようになっている。これらの方法は、水深 h で積分する方法をとっているため場所 x を定めて、その点の水深 h を計算するのに、大変不都合である。そこで水面形方程式をRunge-Kutta法を用いて x で数値積分するようにして、前述のような問題を解決し、さらにより精度の良いプログラムを作ること为目标とする。今回は、まずBresseの理論値とRunge-Kutta法の計算値を比較することによって、本方法の精度について調べた。

2. 計算方法

幅広長方形断面をもつ一様断面直線水路を考える。水面形方程式（Bresseの式）は、無次元表示で次式のように表される。

$$\frac{dH}{dX} = \frac{H^3 - 1}{H^3 - H_c^3}$$

ただし、 $H = h/h_n$ 、 $H_c = h_c/h_n$ 、 $X = ix/h_n$ 、 h ：水深、 h_n ：等流水深、 h_c ：限界水深、 i ：水路床勾配、 x ：流下距離である。

種々の水面形に対して上式を初期条件（ $X = X_0$ で $H = H_0$ ）のもとでRunge-Kutta法を用いて数値計算（有効桁16桁の倍精度）を行った。また、1つの水面形に対して積分間隔 DX を変えて計算を行ない、Bresseの理論値と比較することにより積分間隔 DX の大きさによる精度の影響を調べた。誤差と精度は次のように定義した。

$$\text{誤差} = H1 - H2, \text{精度} = (H1 - H2) / H2$$

ただし $H1$ ：Runge-Kutta法の計算値、 $H2$ ：Bresseの理論値とする。

3. 結果および考察

(1) 積分間隔 DX の大きさと精度について

一般にRunge-Kutta法は、積分間隔を小さくするほど打ち切り誤差の影響が小さくなるため計算精度は良くなるが、あまり小さくすると丸め誤差の影響が大きくなるため精度が悪くなる。しかしこの現象は、現場で必要とされる精度 $1/100$ よりもかなり精度を良くしたときのものなので問題はない。次に実際の積分間隔と実用性を考察する。図1は限界水深 $H_c = 1.5$ のときの境界条件（ $X_0 = 0$ で $H_0 = 0.9$ ）のもとで計算したS3型射流堰上げ背水曲線（Bresseの公式より）である。図2は、そのときの $X = -3.0$ での積分間隔 DX と計算された水深の精度の関係である。この図から精度が $1/100$ のときの積分間隔は $DX = -1.40$ になる。この時、例えば水路床勾

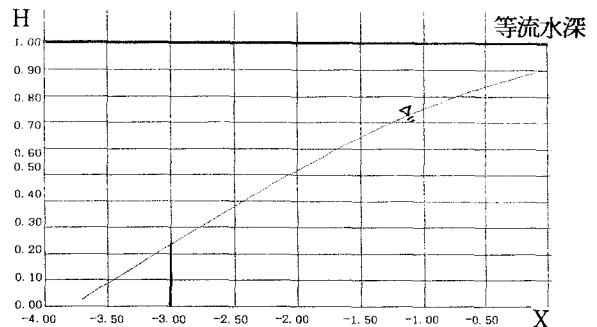


図1 S3型射流堰上げ背水曲線（Bresseの公式より）

配 $i = 1/100$ 、等流水深 $h_n = 1$ 。精度

0 (m) とすると、実際の積分間隔 dx は、140 (m) になり、十分実用的であるといえる。

(2) 累積誤差について

一般に数値積分を進めていくと、誤差が累積される。図3は、S2型水面曲線のH1とH2の比較である。この図のように限界水深付近から水面形の計算を始めると、逆に誤差 $H1 - H2$ が減少することがある。この原因として限界水深付近のH1は、精度が悪いため、H2との誤差が大きいが、図4より水深が浅くなると、H1の傾きの絶対値 $|dH/dX|$ がH2のそれよりも小さくなるために、図3のように少しずつH2に近づいていき、誤差が少なくなったものと思われる。

(3) 水面形が、限界水深・等流水深に近づくときの精度について

水深が等流水深に近ずいたり、直線形になると、精度は良くなる。しかし、逆に限界水深に近ずくと精度が悪くなる。この原因は、Runge-Kutta法はDXのべき級数としては、 DX^4 の項までテイラー展開式と一致するが、曲率が大きくなると近似が粗くなり DX^5 の項以降の局所打ち切り誤差が増えるためである。

4. 結論

不等流水面形方程式を $H = \int f(H) dX + H_0$ という形の式にして、それをRunge-Kutta法で数値積分した結果を、Bresseの理論値と比べると、 $1/100$ 以上の精度が得られ、そのときの積分間隔DXから実際の積分間隔 dx を求めると十分実用的な数値が得られた。

今後の方針としては、Runge-Kutta法の欠点を考慮して、曲率の大きい水面形部分でも、ある同精度内に収まるように適当な積分間隔を変化させる方法に改良すること、そして他の断面形についても計算する必要があると思われる。

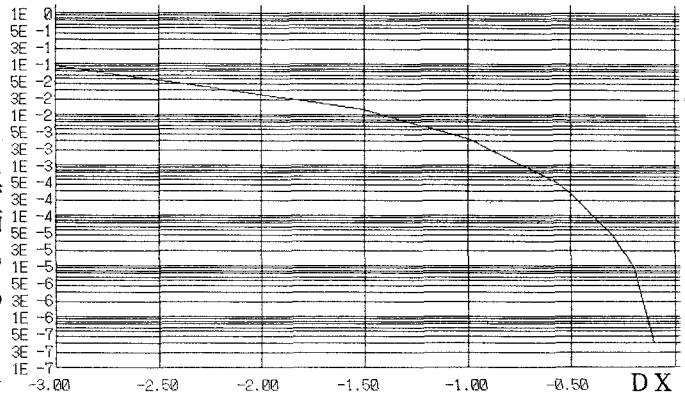


図2 積分間隔DXと計算された水深の精度

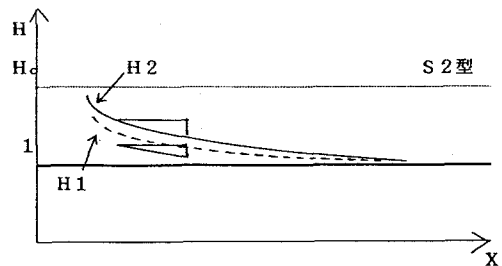


図3 S2型水面形 (H1とH2の比較)

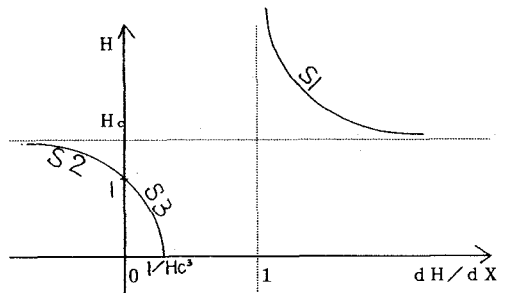


図4 S型水面形の傾きと水深の関係