

II-174

縦渦列の安定性について

九州大学 工学部 正 員 大本 照憲

九州大学 工学部 正 員 平野 宗夫

1. まえがき

剪断乱流は、本質的に三次元的構造を有するが、それが最も顕著に現れた場合、二次流即ち水深スケールの縦渦列を伴う。前報において、著者らは、二次流の駆動力は、幅方向と鉛直方向の流速変動からなるレイノルズ応力であり、乱れの強さの差は、抑制効果を持ち、両者がバランスして安定した二次流が形成されることを指摘した。本研究では、縦渦列の安定性に与える境界の影響を明らかにするため、主流方向に軸を持ち、その向きを交互に変えて配列した縦渦列が有限領域の流れ場に存在する場合の安定性について渦糸モデルにより検討を試みた。

2. 有限領域における縦渦列の安定性

縦渦は空間的広がりを持つが、本論では簡単化のため渦が δ 関数的に集中した渦糸に近似する。また、粘性の効果を無視し完全流体を仮定する。ところで、二次流は水深スケールの大きさを持つことから、河床と同時に自由水面の影響も考慮に入れなければならない。そこで、図-1に示すように河床および自由水面に対し渦糸の鏡像を取り入れれば、複素速度ポテンシャル W は

$$W = (\Gamma/2\pi i) \sum_{j=-\infty}^{\infty} [(-1)^j \{ \log \sin(\pi/2a)(z-ijb) - \log \sin(\pi/2a)(z-a-ijb) \}] \quad (1)$$

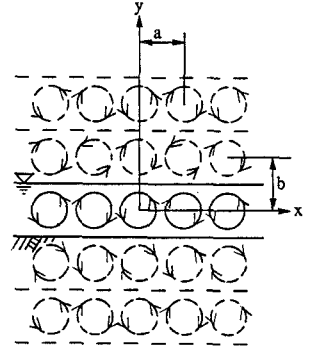


図-1 縦渦配列の模式図

原点 $z=0$ における渦糸の共役複素速度は、

$$\begin{aligned} U - iV &= \frac{d}{dz} \left\{ W - \left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \right) \log z \right\} \Big|_{z=0} = \left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \left\{ \cot \left(\frac{\pi}{2a} \right) (z-ijb) - \cot \left(\frac{\pi}{2a} \right) (z-a-ijb) \right\} - \frac{1}{z} \Big|_{z=0} \\ &= \left(\frac{\Gamma}{4ai} \right) \left\{ \cot \left(\frac{\pi z}{2a} \right) - \cot \left(\frac{\pi}{2a} \right) (z-a) \right\} - \frac{1}{z} \Big|_{z=0} + \left(\frac{\Gamma}{4ai} \right) \sum_{j=-\infty(j \neq 0)}^{\infty} (-1)^j \left\{ \cot \left(\frac{\pi}{2a} \right) (z-a-ijb) - \cot \left(\frac{\pi}{2a} \right) (z-ijb) \right\} \Big|_{z=0} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

従って、原点における渦糸は、平衡状態にある。ところで、渦糸は無数個あるものと想定していることから、座標原点を他の渦糸に移して同様の演算を行えば、同様の結果が得られ、全ての渦糸は平衡状態にあることが証明される。

次に、このような縦渦列の安定性について検討を行う。ところで、図-1に示す有限領域において境界が流線の条件を満たすためには、第 Q 次鏡像の渦列に対して、さらに高次の第 $(Q+1)$ 次鏡像の渦列を配置する必要があることから、境界条件を満たすには厳密には無限次数の渦列を要する。しかし、以下の縦渦列の安定解析では演算の簡単化を図るため、境界の影響を最も強く反映する第一次鏡像の渦列のみによって境界の効果を代表させる。いま、 $z=0$ における渦糸が、微小量 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ だけ変位したとすれば、 $z=0$ における渦糸の鏡像による $z=0$ の渦糸への誘起速度は、

$$\begin{aligned} U &= u_0 + \sum_{m=-\infty(m \neq 0)}^{\infty} (u_{2m} + u_{2m-1}) + \sum_{k=-\infty(k \neq 0)}^{\infty} (u_{2k} + u_{2k-1}) + \sum_{n=-\infty(n \neq 0)}^{\infty} (u_{2n} + u_{2n-1}) \\ &= -(\Gamma/\pi a^2) y_0 \left\{ 2/\chi^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \{ 1/(2m)^2 - 2/((2m)^2 + \chi^2) \} + (\Gamma/(2\pi a^2)) \sum_{m=1}^{\infty} \{ (y_{2m} + y_{-2m})/(2m)^2 - 2(y_{2m} + y_{-2m})/((2m)^2 + \chi^2) \} \right\} \\ &\quad + (\Gamma/\pi a^2) y_0 \sum_{m=1}^{\infty} \{ 1/(2m-1)^2 - 2/((2m-1)^2 + \chi^2) \} - (\Gamma/(2\pi a^2)) \sum_{m=1}^{\infty} \{ (y_{2m-1} + y_{-(2m-1)})/(2m-1)^2 - (y_{2m-1} + y_{-(2m-1)})/((2m-1)^2 + \chi^2) \} \end{aligned} \quad (3)$$

となる。ここに、 $\chi = 2b/a$ である。 y 方向の誘起速度は、

$$V = v_0 + \sum_{m=-\infty(m \neq 0)}^{\infty} (v_{2m} + v_{2m-1}) + \sum_{k=-\infty(k \neq 0)}^{\infty} (v_{2k} + v_{2k-1}) + \sum_{n=-\infty(n \neq 0)}^{\infty} (v_{2n} + v_{2n-1})$$

$$\begin{aligned}
 &= (\Gamma/(\pi a^2)) x_0 [2/\chi^2 + \sum_{m=1}^{\infty} (1/(2m)^2 - 2/((2m)^2 + \chi^2)) - (\Gamma/(2\pi a^2)) \sum_{m=1}^{\infty} \{(x_{2m} + x_{-2m})/(2m)^2 - 2(x_{2m} + x_{-2m})/((2m)^2 + \chi^2)\} \\
 &\quad - (\Gamma/(\pi a^2)) x_0 \sum_{m=1}^{\infty} (1/(2m-1)^2 - 2/((2m-1)^2 + \chi^2)) + (\Gamma/(2\pi a^2)) \sum_{m=1}^{\infty} \{(x_{2m-1} + x_{-(2m-1)})/(2m-1)^2 - 2(x_{2m-1} + x_{-(2m-1)})/((2m-1)^2 + \chi^2)\} \\
 &\text{となる。ところで、縦渦列の摂動に空間的周期関数として三角関数を仮定すれば、微小変位量は、次式ようになる。}
 \end{aligned} \quad (4)$$

$$x_0 = \alpha, \quad y_0 = \beta, \quad x_{2m} = \alpha \cos(2m\phi), \quad y_{2m} = \beta \cos(2m\phi), \quad x_{2m-1} = \alpha \cos\{(2m-1)\phi\}, \quad y_{2m-1} = \beta \cos\{(2m-1)\phi\} \quad (5)$$

ここに、 α および β は時間の関数、 ϕ は任意の実数、摂動の波数は ϕ/a である。上式を式(3),(4)に代入すれば、

$$U = d\alpha/dt = -\rho(\chi^2/2\chi^2 + A-B)\beta \quad (6)$$

$$V = d\beta/dt = \rho(A-B)\alpha \quad (7)$$

となる。ここに、

$$\rho = \Gamma/(\pi a^2) \quad (8)$$

$$A = \sum_{m=1}^{\infty} (1/(2m)^2 - 1/(2m-1)^2 - 2/((2m)^2 + \chi^2) + 2/((2m-1)^2 + \chi^2)) - (\pi^2 B_1/2 - \pi/(2\chi)\{\coth(\chi\pi/2) - \tanh(\chi\pi/2)\} + 1/\chi^2) \quad (9)$$

$$B = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(2m\phi)}{(2m)^2} - \frac{2\cos(2m\phi)}{(2m)^2 + \chi^2} - \frac{\cos(2m-1)\phi}{(2m-1)^2} - \frac{2\cos(2m-1)\phi}{(2m-1)^2 + \chi^2} \right) \quad (10)$$

である。ここに、 B_1 はベルヌーイ定数である。式(6),(7)の両辺を時間 t に関して微分し、若干整理すれば、それぞれ、

$$d^2\alpha/dt^2 = \rho^2(2/\chi^2 + A-B)(B-A)\alpha \quad (11)$$

$$d^2\beta/dt^2 = \rho^2(2/\chi^2 + A-B)(B-A)\beta \quad (12)$$

となる。式(43)および(44)より、 α および β はいずれも特解 $\exp(\lambda t)$ および $\exp(-\lambda t)$ を持つ。ここに

$$\lambda = \pm \rho \{2/\chi^2 + A-B\}(B-A)^{1/2} \quad (13)$$

α および β が共に発散しないためには、次式の条件を満たさなければならない。

$$-\rho^2(2/\chi^2 + A-B)(A-B)|_{\phi=\Delta\phi} < 0 \quad (14)$$

いま、 $\phi=0$ の近傍で摂動の発散を検討する。摂動の波長は $2\pi a/\phi$ であることから、 $\phi=0$ はちょうど波長が無限大の大きさの摂動であることを意味する。式(9),(10)において $\phi=0$ と置けば、

$$(A-B)|_{\phi=0} = 0 \quad (15) \quad \partial(A-B)/\partial\phi|_{\phi=0} = 0 \quad (16)$$

また、 $\partial^2(A-B)/\partial\phi^2|_{\phi=0}$ は、

$$\partial^2(A-B)/\partial\phi^2|_{\phi=0} = 2k^2 \sum_{m=1}^{\infty} (1/((2m-1)^2 + \chi^2) - 1/((2m)^2 + \chi^2)) = \chi\pi/2 \cdot \tanh(\chi\pi/2) - \chi\pi/2 \cdot \coth(\chi\pi/2) + 1 \quad (17)$$

開水路主流部に見いだされる縦渦は、水深スケールの大きさを有することから、 $\chi=2b/a=1$ とおける。上式に $\chi=1$ を代入すれば、

$$\partial^2(A-B)/\partial\phi^2|_{\phi=0} = 0.728 > 0 \quad (18)$$

となる。それ故、 $(A-B)$ は ϕ に関して下に凸の関数形となることから、 $\phi=\Delta\phi$ の、

$$-\rho^2(2/\chi^2 + A-B)(A-B) < 0 \quad (19)$$

すなわち、有限領域における縦渦列は、式(14)の安定条件を満足し、ある微小な摂動が加えられた時その運動は発散せず常に有限な変動に留まり、Liapunovの安定性の定義において安定であることが明かにされた。

著者等は、平坦な粗面上の開水路流れに、水路上流端より幅方向に一様な給砂を行い、その時に発生した浮流砂の高濃度と低濃度からなる縞模様を外的攪乱に対して非常に安定していることを観察した。このことは上記の結果とも一致し、主流部に発生した縦渦列は安定していることが認められる。

参考文献 1) 大本, 平野, M. S. Pallu: 第33回水理講演会論文集, 1989, 2) 平野, 大本, 松枝: 第30回水理講演会論文集, 1986