

II-164

摂動法による計算値の適用範囲について

立命館大学理工学部 正員 ○ 小沢功一
 東京大学工学部 正員 玉井信行

1. まえがき 蛇行流路の流れにおいては、主流の速度は流下方向へ周期的に変化したり、二次流が発達したりする。これらの影響を受けて側岸が浸食されたり、河床に局所的な洗掘部分が現れたりする。これらの現象を明らかにするには主流、二次流の流下方向への遷移、横断方向への分布の状況を把握することが必要である。これまでに側壁の影響が無視できる浅い水深の流れにおける、水深平均流速を用いた基礎式から摂動法により1～3次の解析解が求められている。¹⁾ 今回の報告においてはその結果を実験的に得られた主流、二次流の値と比較した。そしてこれらの1次～3次解の各項の値を比較検討することにより、高次解の収束性について或いは解の適用範囲に関して考察を行った。

2. 解析と結果 水路の中心線が図-1のような蛇行流路曲線に従う蛇行水路の流れに関する基礎式は次に示すような連続式、 s_a 方向、 n_a 方向の運動量方程式と断面の流量の式である。

$$\frac{\partial h_t \bar{u}_s}{\partial s_a} + \frac{\partial h_t \bar{u}_n}{\partial n_a} + \frac{h_t \bar{u}_n}{r_a} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial h_t \bar{u}_s^2}{\partial s_a} + \frac{\partial h_t \bar{u}_s \bar{u}_n}{\partial n_a} + 2 \frac{h_t \bar{u}_s \bar{u}_n}{r_a} + g h_t \frac{\partial h_a}{\partial s_a} + g h_t \frac{\partial z_b}{\partial s_a} + \frac{\tau_{s0}}{\rho} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial h_t \bar{u}_s \bar{u}_n}{\partial s_a} + \frac{\partial h_t \bar{u}_n^2}{\partial n_a} + \frac{h_t (\bar{u}_n^2 - \bar{u}_s^2)}{r_a} + g h_t \frac{\partial h_a}{\partial n_a} + \frac{\tau_{n0}}{\rho} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\int_{-B_0/2}^{B_0/2} h_t \bar{u}_s d n_a = V H_0 B_0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに $\bar{u}_s, \bar{u}_n$ はそれぞれ s_a, n_a 方向の水深平均流速、 r_a は s_a 軸の曲率半径、 ρ は水の密度、 h_t は水深、 τ_{s0}, τ_{n0} は底面における s_a, n_a 方向のせん断応力、 V は断面平均流速、 H_0 は平均水深、 B_0 は水路幅を表している。摂動法により解析解を求めるには、これらの基礎式を無次元化し、変数 $u(=\bar{u}_s/V), v(=\bar{u}_n/V), h(=h_a/H_0)$ について $u=u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\varepsilon^3 u_3+\dots, v=v_0+\varepsilon v_1+\varepsilon^2 v_2+\varepsilon^3 v_3+\dots, h=h_0+\varepsilon h_1+\varepsilon^2 h_2+\varepsilon^3 h_3+\dots$ のように摂動パラメータ $\varepsilon(=B_0/2R)$ を用いて展開した式を代入する。そして ε についてそれぞれの次数ごとにまとめた式から各次数の解析解を求めていく。このときの境界条件は a)側岸; $n=\pm 1$ で $v=0$ b)上流端; $s=s_0$ で $u=u_1(n)$ c)下流端; $s=s_d$ で $(1/2) \int_{-1}^1 h dn=1$ とする。ここに $n=n_a/(B_0/2), s=s_c/R, s_c$ は中心線の流下方向への座標、 R は最小曲率半径($=L/2\pi \theta_0$)である。

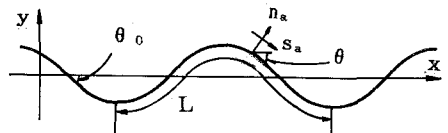


図-1 座標軸

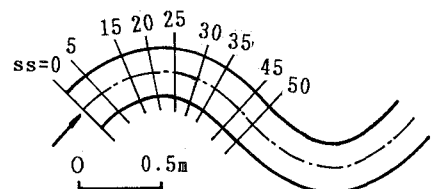


図-2 水路図

主流、二次流の1～3次解

$$u=u_0+\varepsilon u_1, \quad u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2, \quad u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\varepsilon^3 u_3 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$v=v_0+\varepsilon v_1, \quad v_0+\varepsilon v_1+\varepsilon^2 v_2, \quad v_0+\varepsilon v_1+\varepsilon^2 v_2+\varepsilon^3 v_3 \quad \dots\dots\dots (6)$$

を図-2のような水路の流れに適用して、図中の横断位置における計算値と測定値とを比較すると主流、二次流に対してそれぞれ図-3, 4のようになる。ただし二次流については V を掛けて u_n の値で示している。

これらの図において、2, 3次解は測定値と計算値とで良く一致していると見ることが出来る。ただ二次流の(b)SS=5, (h)SS=45においては、定量的には一致していない。その原因として考えられることは測定値が得られた水路の中心線は蛇行流路曲線にほとんど一致してはいるが、一定曲率の湾曲部と直線部との組み合わせ

わせから成っている。その接続の位置がこれらのSS=5,45の所であり、そこでは二次流の測定値が過大に出てきたと考えられる。

3. 解の適用範囲 図-3, 4における計算値の結果に現れているように2次と3次との間の隔たりは小さいから解は収束する傾向にあるものと見ることが出来る。

解の適用範囲を求めるためにたとえば主流と二次流において、3次項と2次項との比の値 $\Delta_{u3} = \varepsilon^3 u_3 / \varepsilon^2 u_2$, $\Delta_{v3} = \varepsilon^3 v_3 / \varepsilon^2 v_2$ の状況を検討してみる。蛇行の影響が最も強く現れるのは湾曲頂点であるから $ks=0$ の位置で考える。ここに k は $k=(2\pi/L)R$ である。また境界の影響が遷移して行く過程は省くことにして減衰項は省略する。横断方向の位置については絶対値で最大となる位置での値を用いる。

最大偏角、フルード数としては代表値として $\theta_0=45^\circ$, $Fr=0.44$ とし、 Δ_{u3} , Δ_{v3} の値を摩擦損失係数 f の値をパラメータとして相対水深 H_0/R に対して計算する。それぞれについて示すと図-5, 6 のようである。 f の値と Manning の粗度係数との対応は水路実験での水深 $H_0=3\text{cm}$ を使うと、 $f=0.1 (n_M=0.04)$, $f=0.03 (n_M=0.022)$, $f=0.01 (n_M=0.013)$, $f=0.005 (n_M=0.009)$ である。従って $f=0.1$ と 0.005 の値は実際にみられる範囲を越えていると見ることが出来る。

実験には水深 $H_0=3\text{cm}$, $R=.504\text{m}$ を使っている ($H_0/R \approx 0.06$)。計算に用いた f の値は $f=0.01 \sim 0.03$ 程度であるから Δ_{u3} としては $\Delta_{u3}=0.3 \sim 0.4$ となる。また Δ_{v3} としては $\Delta_{v3}=0.05 \sim 0.2$ である。従って十分収束の傾向にある。

4. あとがき 主流および二次流の3次項と2次項との比をとってその値を計算したところ、

図-5, 6 から明らかなように $f=0.005 \sim 0.03$ の範囲においては、それらの値は H_0/R の $0.001 \sim 0.1$ に渡って1より小さくなり、解は収束する状況にあるものと見ることが出来る。

図-5 主流の3次解の収束性

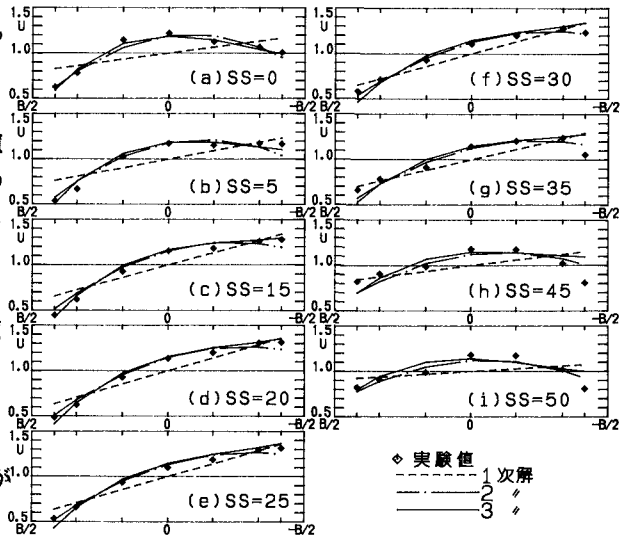


図-3 主流速度の横断分布

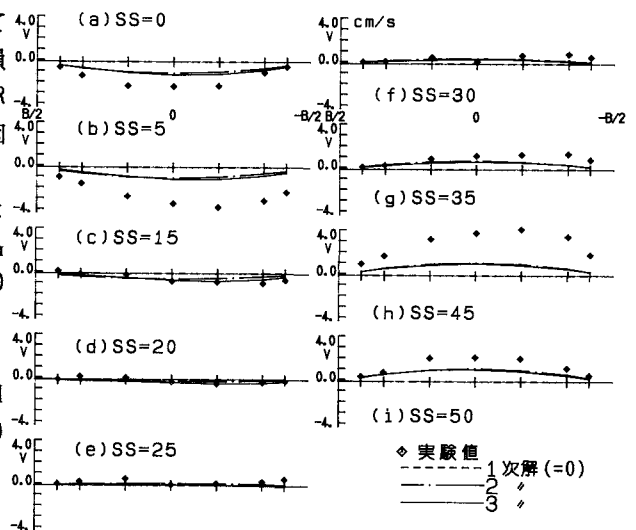


図-4 二次流速の横断分布

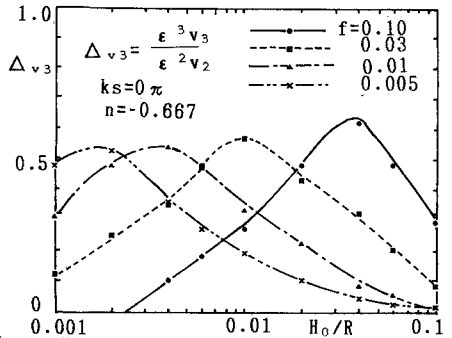


図-6 二次流の3次解の収束性