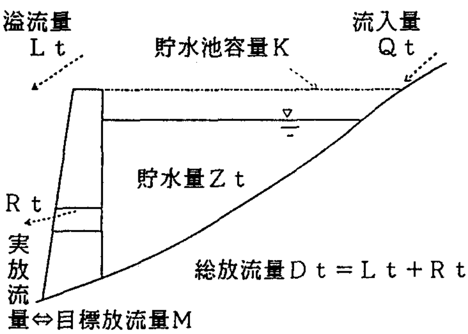
II-118　貯水池における溢流量を勘案した放流量の同時分布の算出

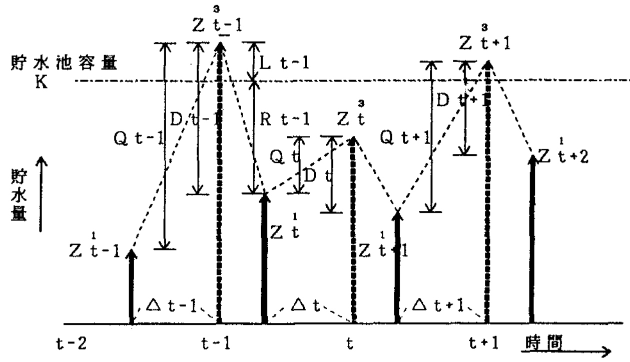
名古屋工業大学　○学生員　川口篤昭、　正員　長尾正志、　学生員　鈴木正人

１．　研究の概要

著者らは２段階推移の手法を用いて、利水用貯水池における利水問題を解析する手法を提案してきた。また本講演会では放流量の同時分布を直接計算する手法とその応用を報告することにしているが、ここでは溢流量を勘案した同様な計算が可能であることを明らかにしたので、その計算手法を中心に報告する。



図－１　利水用貯水池系の概念と各種記号



図－２　放流を勘案した２段階推移モデルの概念

２．　溢流を勘案した２段階推移法

２段階推移とは基本的には、流入による期間の貯留のみを考慮した貯留推移と放流操作による放流推移の２段階で貯水量推移を考えるものである[1]。そこで溢流をも考察対象にするために、期首貯水量に期間流入量を加算した期末貯水量に対する貯水容量の制限を一端除外しておき、貯水池容量が極めて大きいと考えておく。

そこでまず溢流量を、ついで目標放流にあうように放流を行うように考える。したがって、その貯水量の推移はつぎの２段階に分解できる。（モデルの概念や記号は図－１および図－２参照）

貯水容量の制限の無い貯留推移　$Z_t^3=Z_t^1+Q_t$　　この推移を確率推移行列$\mathbb{S}$で表記する。　（１）

溢流を含む放流推移　$Z_{t+1}^1=Z_t^3-D_t$　　この推移を推移行列$\mathbb{D}$で表記する。　（２）

ただし、溢流量L_tを含む総放流量をD_t、実放流量をR_tとする。この内容はつぎのようである。

溢流量　$L_t=(Z_t^3-K)\times \mathrm{rel}(Z_t^3>K)$,　総放流量　$D_t=L_t+R_t$　（K:貯水池容量、M:目標放流量）　（３）

ここに、relはいわゆる関係演算子で、　$\mathrm{rel}X=1$ （$Z_t^3>K$が真の場合）、 $\mathrm{rel}X=0$ （$Z_t^3>K$が偽りの場合）とする。

また、溢流量を含まない実放流量は、普通はＫ＞Ｍであるから、$R_t=\min(M,K,Z_t^3)=\min(M,Z_t^3)$　（４）

さて、流入量は１次の自己相関を持ち、上限がＮであるものとする。すなわち、流量の存在範囲は0,1,2,..,Nとする。また貯水量や流量はいずれも同じ単位量を用いた離散的表現を行っておく。まず、この場合の貯留推移$\mathbb{S}$は次頁表－１に示すようにして求められる。つぎに、放流推移行列$\mathbb{D}$は表－２のように表される。

さて、このような$\mathbb{D}$と$\mathbb{S}$が分かれば、その行列式の意味から次式の総放流量D_tの条件付き分布が得られる。

$$\mathbb{D}\cdot\mathbb{S}=\Pr[Q_t,Z_t^3\mid Q_{t-1},Z_{t-1}^3]=\Pr[D_t(Q_t,Z_t^3)\mid D_{t-1}(Q_{t-1},Z_{t-1}^3)]$$
$$=\Pr[D_t\mid D_{t-1}] \qquad (5)$$

他方、この行列積に対応する期末貯水量とそれに先行する期間流量との結合の定常確率分布を$\{H\}^3$と記すと、

$$\{H\}^3=\Pr[Q_{t-1},Z_{t-1}^3]=\Pr[D_{t-1}(Q_{t-1},Z_{t-1}^3)]=\Pr[D_{t-1}] \qquad (6)$$

結局、総放流量の同時分布は次式で計算できることになる。

$$\Pr[D_t,D_{t-1}]=\Pr[D_t\mid D_{t-1}]\cdot\Pr[D_{t-1}]=\mathbb{D}\cdot\mathbb{S}\times\{H\}^3 \qquad (7)$$

これより各種の統計量が計算できる。たとえば、総放流量の生起確率は次式で表せる。

$$\Pr[D_t]=\sum_{\forall D_{t-1}}\Pr[D_{t-1},D_t]$$

３．　適用計算例

表－１　貯留推移行列𝕊（O：零行列，g_{ij}：流入量 i から流入量 j への条件付確率）

Zt^1 \ Zt^3	Q_{t-1} \ Q_t	0 0 1 2 · N	1 0 1 2 · N	2 0 1 2 · N	·	K 0 1 2 · N	·	K+N−1 0 1 2 · N−1 N	K+N 0 1 2 · N
0	0 1 · N	g_{00} 0 0 · 0 g_{10} 0 0 · 0 · g_{N0} 0 0 · 0	0 g_{01} 0 · 0 0 g_{11} 0 · 0 · 0 g_{N1} 0 · 0	0 0 g_{02} · 0 0 0 g_{12} · 0 · 0 0 g_{N2} · 0	·	O	·	O	O
1	0 1 · N	O	g_{00} 0 0 · 0 g_{10} 0 0 · 0 · g_{N0} 0 0 · 0	0 g_{01} 0 · 0 0 g_{11} 0 · 0 · 0 g_{N1} 0 · 0	·	O	·	O	O
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
K	0 1 · N	O	O	O	·	g_{00} 0 0 · 0 g_{10} 0 0 · 0 · g_{N0} 0 0 · 0	·	0 0 0 · $g_{0,N-1}$ 0 0 0 0 · $g_{1,N-1}$ 0 · 0 0 0 · $g_{N,N-1}$ 0	0 0 0 · g_{0N} 0 0 0 · g_{1N} · 0 0 0 · g_{NN}

流入量分布に、上限N＝2、形状母数ａ＝0.4、相関係数ρ＝0.6の相関二項分布を用い、貯水池容量K＝3の条件で、表－３の貯留推移行列𝕊を得る。また、貯水池の操作規則として、貯水量が目標放流量以上であれば目標放流量を、それ以下であれば貯水量全部を放流する。この操作規則に基づき、目標放流量M＝１として表－４の放流推移行列𝔻を得る。これらの推移行列𝔻、𝕊を乗ずることにより貯水量と流入量との組み合わせによる条件付き確率分布$Pr[Q_t, Z_t^3 \mid Q_{t-1}, Z_{t-1}^3]$が求められる。ところで期末貯水量を指定すれば、前述した貯水池の操作規則により実放流量、溢流量から総放流量が決まるため、それぞれの総放流量に対応する確率行列の要素を加算することにより、総放流量D_tの条件付き分布$Pr[D_t \mid D_{t-1}]$が求められる。つぎに、確率行列の性質を用いることにより、期末貯水量と流入量の定常同時分布 $\{H\}^3$を $\{H\}^3$＝ $\{H\}^3$・𝔻・𝕊の式から求める。したがって、総放流量の条件付き確率分布$Pr[D_t \mid D_{t-1}]$に生起確率$Pr[D_{t-1}]$を乗ずる式（７）により、表－５の定常状態における総放流量同時分布を得る。さらに、総放流量の同時分布が分かれば、それより周辺分布として総放流量D_tの生起定常確率$Pr[D_t]$を得る。同様に実放流量や溢流量についても計算できる。実放流量R_t、溢流量L_tに対応する周辺分布の値は表－５に示す。これらより実放流量、溢流量の定常状態における期待値がそれぞれ0.7152、0.0848と得られ、当然この和は流入量期待値ａ・N=0.8に一致する。つぎに貯水池容量をK＝４と増加させた計算から、実放流量、溢流量期待値0.7355、0.0645を得る。これより、貯水池容量が増すことにより無効放流量がそれだけ減少することが明らかとなる。以上のように、実放流量や溢流量に関する同時確率を別個に計算できることにより、直列ダムにおける下流側ダムの流入量の予測や利水機能評価が可能となる。また、溢流量についての情報が得られることから、治水面における確率評価も可能となり、この手法の有用性が期待できよう。参考文献

1)鈴木正人・長尾正志：２段階推移モデルによる相関離散分布流量を受ける貯水池理論、土木学会論文集　第４１１号／Ⅱ－１２,pp161-168,1989.11.

表－２　放流推移行列𝔻

Z_{t-1}^3 \ Z_t^1	Q_{t-1} \ Q_t	0 0 1 · N	1 0 1 · N	2 0 1 · N	·	K−M 0 1 · N	K−M+1 0 1 · N	·	K 0 1 · N
0	0 1 · N	1 1 · 1	O	O	·	O	O	·	O
1	0 1 · N	1 1 · 1	O	O	·	O	O	·	O
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
M	0 1 · N	1 1 · 1	O	O	·	O	O	·	O
M＋1	0 1 · N	O	1 1 · 1	O	·	O	O	·	O
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
K＋M	0 1 · N	O	O	O	·	1 1 · 1	O	·	O
K＋M＋1	0 1 · N	O	O	O	·	1 1 · 1	O	·	O
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
K＋N	0 1 · N	O	O	O	·	1 1 · 1	O	·	O

表－３　貯留推移行列𝕊

Zt^1 \ Zt^3	Q_{t-1} \ Q_t	0 0 1 2	1 0 1 2	4 0 1 2	5 0 1 2
0	0 1 2	0.71 0 0 0.20 0 0 0.06 0 0	0 0.27 0 0 0.68 0 0 0.36 0	O	O
1	0 1 2	O	0.71 0 0 0.20 0 0 0.06 0 0	O	O
2	0 1 2	O	O	0 0 0.03 0 0 0.12 0 0 0.58	O
3	0 1 2	O	O	0 0.27 0 0 0.68 0 0 0.36 0	0 0 0.03 0 0 0.12 0 0 0.58

表－４　放流推移行列𝔻（Ｉ：単位行列）

Z_{t-1}^3 \ Z_t^1	Q_{t-1} \ Q_t	0 0 1 2	1 0 1 2	2 0 1 2	3 0 1 2
0	0 1 2	I	O	O	O
1	0 1 2	I	O	O	O
5	0 1 2	O	O	I	O

表－５　総放流量の同時分布

D_{t-1} \ D_t	0	1	2	周辺分布 $P_r[D]$	溢流量 L_{t-1}	実放流量 R_{t-1}
0	0.2010	0.0839	0.0000	0.2848	0	0
1	0.0839	0.5107	0.0358	0.6303	0	1
2	0.0000	0.0350	0.0490	0.0848	1	1