土木学会第45回年次学術講演会（平成２年９月）

II-116　水理モデルを考慮したダム放流量の最適制御

○　中央大学　学生員　梅津　剛
三井造船　田中　裕二
中央大学　正　員　川原　睦人

１．はじめに　従来各々のダムに設けられている、一定放流量や一定貯留などの固定的な操作規定では、ダム群の治水・利水の両面での効果的な運用が難しいと思われる。この様な問題に対し、ダム放流量による洪水調節を制御過程として考え、最適制御理論を応用し、ダム群の放流量を決定する方法が考えられる。

本手法では、洪水時における水流の挙動をより正確に捕らえるために、最適制御理論に水理モデルを加えることを提案する。水理モデルの計算手法としては、浅水長波方程式を基礎方程式とし、有限要素法を用いることとする。最適制御手法としては、評価関数と状態方程式に対する最適軌道計算手法として、共役勾配法、ＤＰ法などを用いることが考えられるが、計算時間や計算記憶容量などの節減を検討した結果、最大原理を用いるSakawa-Shindo 法を適用するものである。

２．水理モデルと有限要素法　基礎方程式として、次の浅水長波方程式を用いるものとする。

$$\dot{q}_i + g(H+\zeta)(H+\zeta+z)_{,i} + \frac{g\,n^2}{(H+\zeta)^{4/3}} U q_i = 0 \qquad (1)$$

$$\dot{\zeta} + q_{i,i} = 0 \qquad (2)$$

ここで、q_i，ζは、この方程式系の未知量で、流量，水位変動量を表す。H，Z，U，g，nは、それぞれ、水深，河床高，流速，重力加速度，マンニングの粗度係数である。ここで、水系内に流入する洪水流量q_iは、上流境界S_Uに与えられ、下流境界S_cにおいて放流量q_{ci}が規定されるものとする。

$$q_i = \hat{q}_i \quad \text{on } S_U \quad , \quad q_i \hat{=} q_{ci} \quad \text{on } S_c \qquad (3),(4)$$

ガレルキン法にもとずく有限要素法を適用し、式(1),(2) を離散化する。有限要素は三角形一次を用いる。式(3),(4) を加えて、マトリックスで表すと有限要素方程式は以下のようになる。

$$[M]\{\dot{x}\}+[H]\{x\}+[A]\{f\}+[B]\{u\}+\{E\}=\{0\} \qquad (5)$$

ここで、状態ベクトルとして$\{x\}^T=\{q_i, \zeta\}^T$、また、式(3),(4) の境界条件は、$[A]\{f\}$，$[B]\{u\}$という形で表され、$\{f\}^T=\{\hat{q}_i, 0\}^T$，$\{u\}^T=\{\hat{q}_{ci}, 0\}^T$である。式 (5)を状態ベクトルについて書き表すと、次の状態方程式を導くことができる。

$$\{\dot{x}\}=[C]\{x\}+[D]\{u\}+[F]\{f\}+[G] \qquad (6)$$

ここで、$[C]=-[M]^{-1}[H]$, $[C]=-[M]^{-1}[B]$, $[F]=-[M]^{-1}[A]$, $[G]=-[M]^{-1}\{E\}$である。また、初期条件は、時間$t=t_0$において、$\{x_0\}^T=\{q_{0i}, \zeta_0\}^T$；(7) とする。

３．最適制御理論の適用　最適制御問題の概要は、状態変数（流量，水位変動量）、制御変数（ダム放流量）、外乱（洪水流量）の３要素からなる微分方程式のもとで、評価関数を最小にする制御変数の軌道を決定する問題と考えられる。この評価関数の設定として、主なる目的に、洪水ピーク時の水位上昇をできるだけ抑制することとし、次式のような評価関数を考えるものである。

$$J=\int_{t0}^{tf} (\{\zeta\}^T[S]\{\zeta\}+\{u\}^T[R\{u\})dt \qquad (8)$$

ここで、t_0，t_fは、それぞれ制御時間の始点と終点である。［Ｓ］，［Ｒ］は、重み係数行列である。この重み係数行列の設定によって、制御対象領域中の、水位の制御の度合いを変えることができる。

本手法のダム放流量の最適制御問題は、式(6),(7) のもとで、式(8) を最小にする放流量$\{u\}$の軌道を決定する問題として定式化される。この問題を解くためにラグランジュ乗数$\{p\}$を導入しハミルトニアン関数$\mathcal{H}$を次のように定義する。

$$\mathcal{H}=\{\xi\}^T[S]\{\xi\}+\{u\}^T[R]\{u\}+\{p\}^T([C]\{x\}+[D]\{u\}+[F]\{f\}+[G]) \tag{9}$$

オイラーの基準方程式と横断性の条件により、次の乗数に関する方程式と終端条件が与えられる。

$$\{\dot{p}\}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\{x\}}=-2[S]\{\xi\}-[C]^T\{p\} \tag{10}$$

$$\{p_{(tf)}\}=\{0\} \tag{11}$$

以上、式(6),(7),(10),(11) により、制御時間における始点と終点での２点境界値問題が導かれる。ここで、制御放流量｛ｕ｝の最適軌道を求める手法として、次のSakawa-Shindo 法を用いる。｛ｕ｝についてのイタレーションを行う際に、初期の段階において安定性を得るために式（9)のハミルトニアン関数$\mathcal{H}$を次のように変形する。ここで、添字（ｉ）はイタレーション数を表す。

$$\mathcal{K}^{(i)}=\mathcal{H}^{(i)}+(\{u^{(i)}\}-\{u^{(i-1)}\})^T[W^{(i)}](\{u^{(i)}\}-\{u^{(i-1)}\}) \tag{12}$$

ここに$[W^{(i)}]$は非負の定数を対角要素とする対角行列である。最大原理を用いて最適条件は、

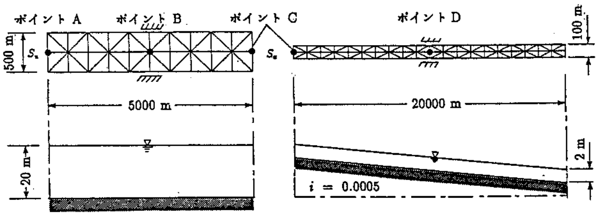
$$\frac{\partial\mathcal{K}^{(i)}}{\partial\{u^{(i)}\}}=2[R]\{u^{(i)}\}+[D]^T\{p^{(i-1)}\}+2[W^{(i)}](\{u^{(i)}\}-\{u^{(i-1)}\})\equiv 0 \tag{13}$$

となり、上式より、｛ｕ｝の更新方程式は次式として求められる。

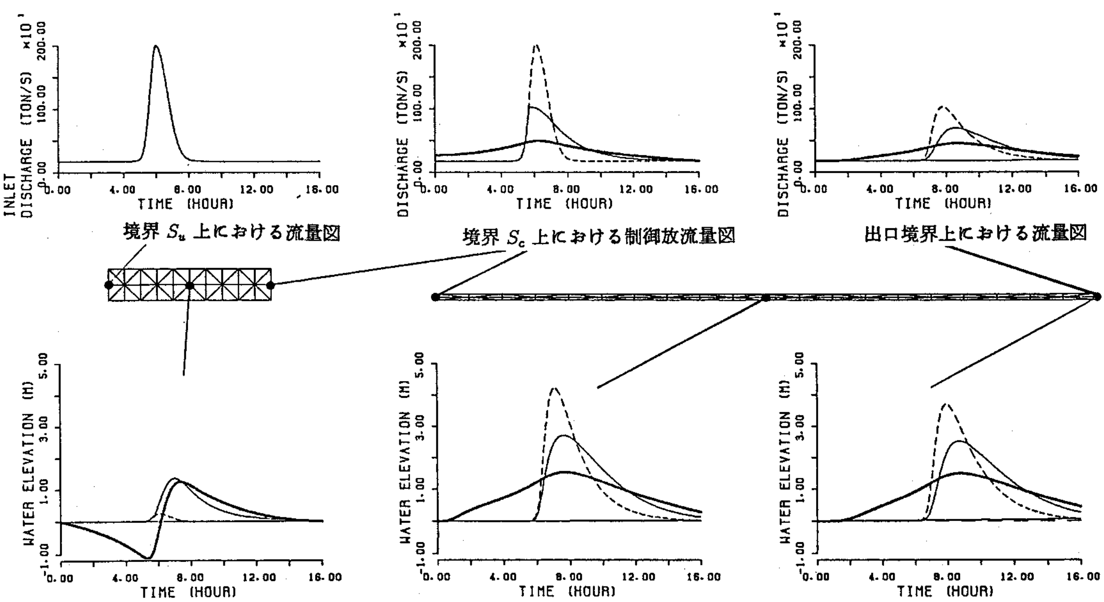
$$\{u^{(i)}\}=-(2[R]+2[W^{(i)}])^{-1}([D]^T\{p^{(i-1)}\}-2[W^{(i)}]\{u^{(i-1)}\}) \tag{14}$$

なお、式(6),(10)の時間積分法には二段階陽的解法を用いるものとする。

４．計算例　ダム上流部より洪水波形流量が流入する場合の、ダムと河川の水位の制御についての適用例を報告する。図－１のモデルについてＡ点がダム流入部，Ｃ点がダム放流部である。制御計算は、図－２において、予備放流が行えない場合（流入量以下の放流量）を想定した拘束条件付の場合（実線）と、拘束条件なしの場合（太線）、さらに、制御を施さない場合（点線）を行った。各地点のハイドロをみると、予備放流を行う拘束なしの制御計算において、水位上昇の抑制に大きな効果を示していることが分かる。今後更に、支川や貯水池をも含めた問題に適用して行く考えである。



図－１ 解析モデル図



図－２　各地点における水位図