

II-94 分数段階法による領域分割型重み付差分法 地下塩水くさび解析

東 和 大学 正員 空閑幸雄

九州産業大学 正員 加納正道

九州産業大学 正員 赤坂順三

1. まえがき 筆者らは前報¹⁾において、被圧滞水層内における塩水くさび解析の計算に必要な配列と、計算時間短縮のため、図1の解析領域をサブリージョン(部分領域)分割型メッシュで解く手法を提案した。また、塩水くさび定常状態における淡水と塩水の流れの状況を把握するため実験を行ったところ、塩水くさび内部と淡塩境界付近では流速が小さく拡散が卓越すると考えられる。そこで本報では、移流拡散方程式の解法にあたり、時間刻みの1段の間に1/2の分数段を設けて拡散と移流の効果を分離させる、²⁾サブリージョン分割型分数段階法的重み付差分法の定め方とサブリージョン分割型メッシュによる塩水くさび解析結果の一部を示す。

2. 基礎方程式 被圧滞水層内の塩水くさびの浸透流と拡散について、基礎式を考えれば、式(1)、式(2)のように示すことができる。

$$\text{浸透流方程式} : k_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2 \frac{\rho}{\rho_f} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{移流拡散方程式} : \frac{\partial c}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + d_2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - u_1 \frac{\partial c}{\partial x} - u_2 \frac{\partial c}{\partial y} \quad (2)$$

ここに、 k_1, k_2 : 透水係数、 H : 圧力水頭、 ρ : 流体の密度、 ρ_s : 塩水の密度、 ρ_f : 淡水の密度、 c : 塩分濃度、 u_1, u_2 : x, y 方向の実流速、 d_1, d_2 : x, y 方向の拡散係数である。なお、密度 ρ と濃度 c との関係は、式(3)である。

$$\rho = \rho_f + (\rho_s - \rho_f) \cdot c \quad (3)$$

ここで、移流拡散方程式を分数段階法で求めるために、拡散方程式と移流方程式を式(4)、(5)のように考える。ここに、 $c^{(k, k+1/2)}$ は k 時刻および $k+(1/2)\Delta t$ 時刻による濃度により差分を行うことを示す。

$$\frac{\partial c^{(k, k+1/2)}}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 c^{(k, k+1/2)}}{\partial x^2} + d_2 \frac{\partial^2 c^{(k, k+1/2)}}{\partial y^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial c^{(k+1/2, k+1)}}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial c^{(k+1/2, k+1)}}{\partial x} - u_2 \frac{\partial c^{(k+1/2, k+1)}}{\partial y} \quad (5)$$

3. 分数段階法的重み付差分法の定め方 図1に示すメッシュ幅の異なる境界(Ω_1, Ω_2)上における浸透流方程式のサブリージョン分割型重み付差分法の定め方は、前報²⁾と同様である。ここでは、移流拡散方程式のサブリージョン分割型分数段階法的重み付差分法の定め方について述べる。まず、拡散方程式(4)の未知濃度 $c^{k+1/2}$ を次のようにして求める。いま、図2に示す二次元拡散差分モデル(重み: P_i)を考えると重み付差分式は式(7)で示される。ここで、式(7)の重み P_1, P_2, P_3 の決定は、 x, y, t の増分を $\Delta x = \Delta y = h, \Delta t = 1/2k$ として図2の原点(i, g 点)の近くを考え、 $x = p_1 h, y = p_2 h, t = q_1/2k$ と離散化をほどこす。そこで、基礎式(4)を満足する多項式(6)において、 $r = 0, 2, 4$ とおいて得られる c の値を式(7)に代入して得られた連立方程式(8)を解いて求められる。重み P_1, P_2, P_3 が求まれば式(7)の差分式が決定され、 $k+1/2$ 時刻の濃度が得られる。つぎに、求めた $k+1/2$ 時刻の濃度を既知として、移流方程式(5)の未知濃度 c^{k+1} を重み付差分法で求める。まず、基礎式(5)を満足する多項式(9)を求める。ここで前述同様離散化をほどこし、図2に示す二次元移流差分モデル(重み: Q_i)

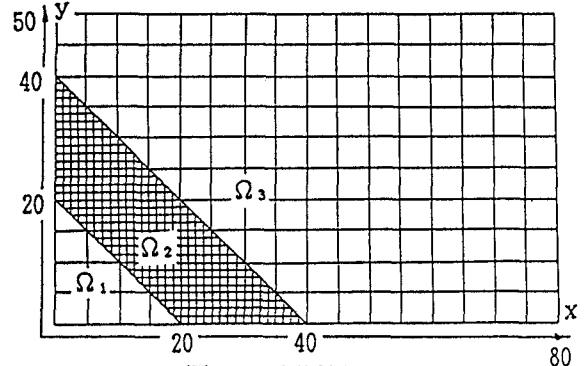


図-1 解析領域

を考えると重み付差分式(10)が得られる。いま考える点に原点を移し、式(9)において $r=0, 1, 2, 3, 4$ とにおいて得られる $c^{(r)}$ の値を式(10)に代入すれば重み Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 を求める連立方程式(11)が得られる。これを解いて $k+1$ 時刻の濃度 c^{k+1} を求めることができる。

$$c^{(r)}(x, y, t) = \sum_{i=0}^{r/2} \left[\frac{(x+y)^{r-2i}}{(r-2i)!} \cdot \frac{\{(d_1+d_2)t\}^i}{i!} \right] \quad (6)$$

$$c(i, g, j+1/2) = P_1 \{c(i, g-1, j+1/2) + c(i+1, g, j+1/2)\} + P_2 \{c(i-4, g, j+1/2) + c(i, g+4, j+1/2)\} + P_3 c(i, g, j) \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2(1+\mu_*) & 2(16+\mu_*) & 0 \\ 2(1+6\mu_*+3\mu_*^2) & 2(256+96\mu_*+3\mu_*^2) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_* \\ 3\mu_*^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

μ_* : 二次元拡散数

$$c^{(r)}(x, y, t) = \sum_{j=0}^r [(-1)^j \frac{(x+y)^{r-j}}{(r-j)!} \cdot \frac{\{(u_1+u_2)t\}^j}{j!}] \quad (9)$$

$$c(i, g, j+1) = Q_1 c(i, g-1, j+1) + Q_2 c(i+1, g, j+1) + Q_3 c(i-4, g, j+1) + Q_4 c(i, g+4, j+1) + Q_5 c(i, g, j+1/2) \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -(1+F_*) & (1-F_*) & -(4+F_*) & (4-F_*) & -1/2F_* \\ (1+F_*)^2 & (1-F_*)^2 & (4+F_*)^2 & (4-F_*)^2 & (1/2F_*)^2 \\ -(1+F_*)^3 & (1-F_*)^3 & -(4+F_*)^3 & (4-F_*)^3 & -(1/2F_*)^3 \\ (1+F_*)^4 & (1-F_*)^4 & (4+F_*)^4 & (4-F_*)^4 & (1/2F_*)^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -F_* \\ F_*^2 \\ -F_*^3 \\ F_*^4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

F_* : 二次元クーラン数

4. 解析結果 ここでは、前報²⁾で示したサブリージョン分割型メッシュによる解析結果の一部を図3に示す。ここに、実線は定常状態における実験値を表わし、点線は領域分割型重み付差分法解析である。

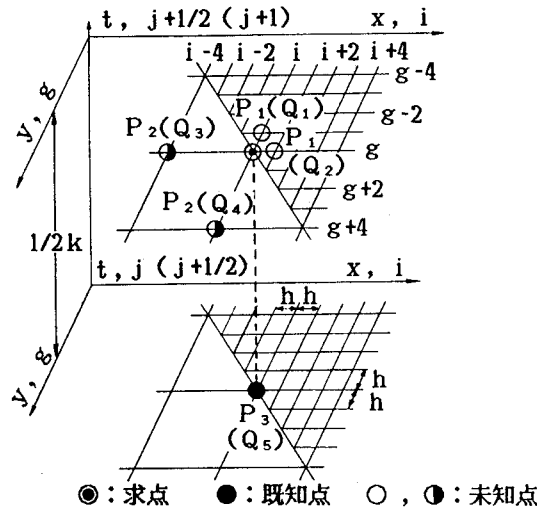


図2 二次元拡散差分モデル(P_i)
二次元移流差分モデル(Q_j)

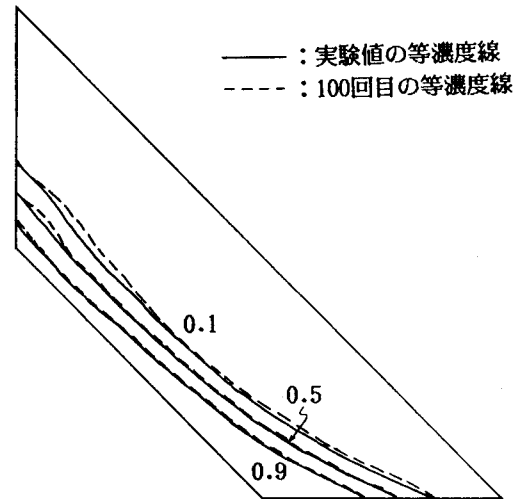


図3 サブリージョン分割型重み付差分法解析

参考文献

- 1) 加納・赤坂・空閑: 塩水くさびの淡塩境界面における移流拡散の重み付差分法解析、第43回年講2部
- 2) 加納・赤坂・空閑: 領域分割型重み付差分法による地下塩水くさび解析、平成元年度西部支部年講