

I-544

一様半無限平面におけるグリーン関数(ラム問題)の数値計算法

岡山大学 正会員 竹宮宏和
岡山大学 学生員 川崎昌宏

1. まえがき

地震工学問題において、不整形地盤の散乱波動場の解析、地盤と構造物の動的相互作用解析でグリーン関数の評価が重要となる。筆者らは既に半無限層状粘弾性地盤内の加振問題に対する解を、Chebyshevの多項式近似を利用した修正Clenshaw-Curtis法を適用した効率的な計算法を開発したが、解の安定性からある層厚以内に層をサブ分割して対処した。これにより対象系を直接境界要素法によって解析する際、計算時間が、その分、要することになった。ここではむしろ、一様な半無限平面の場合を対象にしてのグリーン関数の計算法に注目し、積分核に対する波数領域積分を、レーリ極に入念な考慮を払って求める計算法について開発したので、上記の解と比較検討した。

2. 定式化

一様な半無限粘弾性体内の調和点加振に対して、ポテンシャル理論から解をフーリエ変換法によって求める。このとき変位、応力成分は

$$\{u, w, \tau_{xz}, \sigma_{zz}, \sigma_{xx}\}^T = \int_{-\infty}^{\infty} \{u, w, \tau_{xz}, \sigma_{zz}, \sigma_{xx}\}^T \exp\{ik(x-\xi)\} dk \quad (1)$$

ここに波数領域解 $\{U, W, T_{xz}, \Sigma_{zz}, \Sigma_{xx}\}$ は文献1)の支配式で自由地表面の境界条件の下に容易に算出される。

$$G_{ij} = G(P_i, Q_j) = G_{ij}(x, z; \xi, \eta) = G_{ij}^0(x, z; \xi, \eta) \pm G_{ij}^0(x, z; \xi, -\eta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_{ij}(x, z; \xi, \eta) dk \quad (2)$$

但し、 G_{ij}^0 は無限平面に対するグリーン関数を定義したもので複号は $i=j$ のとき負をとる。

$$G_{ij}^0(x, z; \xi, \eta) = \frac{i}{4\mu} \left[H_0^{(1)}(k_2 r) \delta_{ij} + \frac{1}{k_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \{H_0^{(1)}(k_2 r) - H_0^{(1)}(k_1 r)\} \right] \quad (3)$$

ここに、応答点 $P_i(x, z)$ 、加振点 $Q_j(\xi, \eta)$ 、 $r^2 = (x-\xi)^2 + (z-\eta)^2$

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\frac{\nu_2}{F(k)} \{2k^2 e^{-\nu_1 x} - (2k^2 - k_2^2) e^{-\nu_2 x}\} \{2k^2 e^{-\nu_1 \eta} - (2k^2 - k_2^2) e^{-\nu_2 \eta}\} e^{ik(x-\xi)} \\ A_{21} &= \frac{k}{F(k)} \{2k^2 e^{-\nu_1 x} - (2k^2 - k_2^2) e^{-\nu_2 x}\} \{2\nu_1 \nu_2 e^{-\nu_1 \eta} - (2k^2 - k_2^2) e^{-\nu_2 \eta}\} e^{ik(x-\xi)} \\ A_{12} &= -\frac{k}{F(k)} \{2k^2 e^{-\nu_1 x} - (2k^2 - k_2^2) e^{-\nu_2 x}\} \{2\nu_1 \nu_2 e^{-\nu_1 \eta} - (2k^2 - k_2^2) e^{-\nu_2 \eta}\} e^{ik(x-\xi)} \\ A_{22} &= -\frac{\nu_1}{F(k)} \{(2k^2 - k_2^2) e^{-\nu_1 x} - 2k^2 e^{-\nu_2 x}\} \{(2k^2 - k_2^2) e^{-\nu_1 \eta} - 2k^2 e^{-\nu_2 \eta}\} e^{ik(x-\xi)} \end{aligned} \quad (4)$$

$F(k) = 4k^2 \nu_1 \nu_2 - (2k^2 - k_2^2)^2$ はレーリ関数、 $\nu_1 = \sqrt{k^2 - k_1^2}$ 、 $\nu_2 = \sqrt{k^2 - k_2^2}$ 、 $k_1 = \frac{\omega}{V_P}$ 、 $k_2 = \frac{\omega}{V_S}$

これらは従来、ミラーイメージ法で誘導されてきている式に一致するが、後者では変位、応力成分のうち、見かけ上分岐点のような ν_1 を分母に含んだ波数積分項 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(k)}{F(k)\nu_1} e^{f(k)} dk$ が現われている。しかし、式の展開法で上

式(4)は全て、一般に $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(k)}{F(k)} e^{f(k)} dk$ の形のみ書き表されていることに注意されたい。

次にその数値積分法を説明をする。式の無限積分を、レーリ極の存在によって非常に鋭ピークの現われる領域とそれ以外の領域に区分して

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(k)}{F(k)} e^{f(k)} dk &= \int_{-\infty}^{-k_c} \frac{h(k)}{F(k)} e^{f(k)} dk + \int_{-k_c}^{k_c} \frac{h(k)}{F(k)} e^{f(k)} dk + \int_{k_c}^{\infty} \frac{h(k)}{F(k)} e^{f(k)} dk \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned} \quad (5)$$

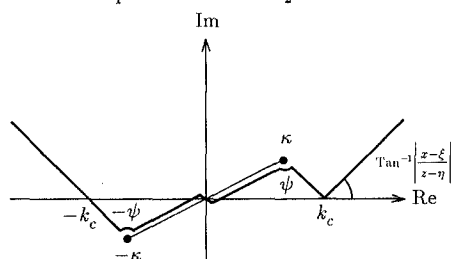


図 1 積分路

I_2 の計算はCauchyの主値積分と極の回りの留数積分により

$$I_2 = \int_{k_c}^0 \left\{ \frac{h(k)}{F(k)} e^{f(k)} - \frac{h(-\kappa)}{F'(-\kappa)(k+\kappa)} e^{f(-\kappa)} dk \right\} + \frac{h(-\kappa)}{F'(-\kappa)} e^{f(-\kappa)} \left\{ \ln \frac{|\kappa|}{|-\kappa_c + \kappa|} - i\psi \right\} \\ + \int_0^{k_c} \left\{ \frac{h(k)}{F(k)} e^{f(k)} - \frac{h(\kappa)}{F'(\kappa)(k-\kappa)} e^{f(\kappa)} dk \right\} + \frac{h(\kappa)}{F'(\kappa)} e^{f(\kappa)} \left\{ \ln \frac{|\kappa_c - \kappa|}{|\kappa|} + i\psi \right\} \quad (6)$$

I_1, I_3 の半無限積分は、変数変換によって再急降下線に沿って遂行する。

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{h(-s)}{F(-s)} e^{-k_c\{(z+\eta) + i(x-\xi)\}} \frac{1}{(z+\eta) + i(x-\xi)} e^{-s} ds \quad : \nu_i = -k \ (k \ll -k_1, -k_2) \quad (7)$$

ここに、 $S = -(k+k_c)\{(z+\eta) + i(x-\xi)\}$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{h(s)}{F(s)} e^{-k_c\{(z+\eta) - i(x-\xi)\}} \frac{1}{(z+\eta) - i(x-\xi)} e^{-s} ds \quad : \nu_i = k \ (k \ll k_1, k_2) \quad (8)$$

ここに、 $S = (k-k_c)\{(z+\eta) - i(x-\xi)\}$

3. 数値計算例と考察

内部減衰は複素ラメ定数 $\lambda^* = \lambda(1-2i\beta)$ 、 $\mu^* = \mu(1-2i\beta)$ を定義に導入している。但し β は減衰定数 I_2 の閉区間の数値積分は、 $k_c = 2\kappa$ として Gaussの求積法(15点積分)を、また I_1, I_3 の開区間の積分は同15点積分法を使用するコードを開発した。

数値計算例として、地表面及び地中線加振に対する任意の点の変位ならびに応力成分を評価した。表1は、その結果を文献⁽¹⁾での計算結果と比較したもので、両者の精度の良好な一致がみられる。表1で計算法の違いによる結果の差がいくつかのケースについて実部、虚部のいずれかで認められるが、これは実部、虚部のペアにおいて、オーダーのかんりの差がある場合に特に現われていることから、数値積分上の精度によるものだと考えられる。精度に大きな影響を表すものとしては、 k_c と I_2 の区間サブ分割が考えられ、これについては今後改良の必要性がある。

表 1 線加振による地盤応答の比較

	CASE 1 (0, 0; 3, 0)				CASE 2 (0, 0; 3, 3)			
	Fx加振		Fz加振		Fx加振		Fz加振	
u	-0.103320e+00	0.448987e-01 *	0.109209e+00	0.341753e-01 *	-0.338142e-01	-0.668974e-01 *	-0.113235e+00	0.350457e-01 *
	-0.103310e+00	0.448939e-01 **	0.109211e+00	0.341908e-01 **	-0.339836e-01	-0.669055e-01 **	-0.113177e+00	0.350356e-01 **
w	-0.109209e+00	-0.341753e-01 *	-0.542446e-01	-0.158428e+00 *	-0.102410e+00	0.382529e-02 *	0.253771e-01	-0.742393e-01 *
	-0.109211e+00	-0.341908e-01 **	-0.541914e-01	-0.158444e+00 **	-0.102342e+00	0.381478e-02 **	0.256144e-01	-0.742324e-01 **
τ_{xz}	0.000000e+00	0.000000e+00 *	0.000000e+00	0.000000e+00 *	0.105408e+00	-0.929635e-01 *	0.824734e-01	-0.333445e-01 *
	-0.350414e-15	0.168614e-17 **	0.988010e-17	0.440358e-18 **	0.105666e+00	-0.929482e-01 **	0.812858e-01	-0.333400e-01 **
σ_{zz}	0.000000e+00	0.000000e+00 *	0.000000e+00	0.000000e+00 *	0.214325e-02	-0.121012e+00 *	0.124583e-01	0.471335e-01 *
	-0.656788e-17	-0.156581e-17 **	-0.350414e-15	0.174583e-17 **	0.104468e-02	-0.121020e+00 **	0.122029e-01	0.471365e-01 **
σ_{xx}	0.771177e-01	-0.231634e+00 *	-0.615243e-01	0.349443e+00 *	0.143544e-01	-0.258851e-01 *	-0.431833e-01	-0.177304e+00 *
	0.771167e-01	-0.231619e+00 **	-0.615672e-01	0.349451e+00 **	0.144270e-01	-0.258782e-01 **	-0.429276e-01	-0.177313e+00 **

	CASE 3 (0, 2; 3, 0)				CASE 4 (0, 2; 3, 3)			
	Fx加振		Fz加振		Fx加振		Fz加振	
u	-0.109963e+00	-0.682424e-02 *	0.965802e-01	-0.234606e-01 *	-0.188402e-01	-0.128889e-01 *	-0.533555e-01	0.252241e-02 *
	-0.109607e+00	-0.682892e-02 **	0.959326e-01	-0.234606e-01 **	-0.186308e-01	-0.128869e-01 **	-0.533590e-01	0.251520e-02 **
w	0.755129e-01	-0.801792e-01 *	0.527392e-02	-0.122870e+00 *	0.200377e-01	0.415881e-01 *	-0.225115e-02	-0.791077e-01 *
	0.748902e-01	-0.801853e-01 **	0.477170e-02	-0.122883e+00 **	0.200297e-01	0.415951e-01 **	-0.222551e-02	-0.791087e-01 **
τ_{xz}	0.000000e+00	0.000000e+00 *	0.000000e+00	0.000000e+00 *	-0.103265e-01	0.182151e-01 *	0.894828e-01	0.270781e-02 *
	-0.424107e-17	0.225261e-17 **	0.317269e-17	-0.190820e-17 **	-0.103832e-01	0.182146e-01 **	0.894322e-01	0.271845e-02 **
σ_{zz}	0.000000e+00	0.000000e+00 *	0.000000e+00	0.000000e+00 *	-0.666824e-01	0.454655e-01 *	0.207500e-01	0.309573e-01 *
	0.282459e-17	0.869342e-18 **	-0.779079e-17	0.462868e-17 **	-0.666635e-01	0.454607e-01 **	0.206908e-01	0.309577e-01 **
σ_{xx}	0.119112e-02	-0.907371e-01 *	-0.576222e-02	0.285155e+00 *	0.344515e-01	-0.907750e-01 *	0.693177e-02	-0.956785e-01 *
	0.692861e-02	-0.907239e-01 **	-0.157678e-02	0.285173e+00 **	0.344377e-01	-0.907559e-01 **	0.699207e-02	-0.956759e-01 **

参考文献 (1)H.Takemiya,K.arioka,Numerical Computation Method of Green Functions 2D Viscoelastic Layered Halfspace for Berried Uniformly-distributed Loads,Prof.JSCE,(submitted)