

I-542

地盤震動解析手法における連続体モデルと離散型モデルの等価性についての一考察

和歌山工業高等専門学校 正員 辻原 治

徳島大学工学部

正員 沢田 勉

1. はじめに 地表の地震動強度は表層地盤の増幅特性に強く依存しており、地震時の表層地盤の応答を予測することは耐震工学上非常に重要である。このような地盤震動解析法としてよく用いられるものに、弾性波の重複反射理論に基づく方法(以後重複反射法とよぶ)と、地盤を質点系に置換する方法(以後集中質点法とよぶ)がある。前者は地盤を本来の連続体としてモデル化するものである。一方、後者は単位断面積の土柱を適当な層数に分割し、せん断多質点系にモデル化するものである。両解析法においては、減衰力の扱いが異なっている。つまり、重複反射法では、媒体の粒子速度にかかわらず減衰を一定とすることが多いのに対し、集中質点法では、質点間の相対速度に比例する粘性減衰を仮定することが多い。このため、両解析モデルの減衰パラメータを直接対応づけることができない。そこで、本報告では、質点系モデルの減衰を非粘性型としたときの両解析モデルの等価性を周波数領域で検討するとともに、質点系のモード解析との対応について若干の考察を加える。

2. 連続体モデルと質点系モデルのパラメータの関係 いま、水平方向に半無限の広がりを持つ堆積地盤中を鉛直方向にせん断波が伝播するものとする(図-1)。地盤を粘弾性体とし、Voigtモデルを仮定すると、運動方程式は次式で表される。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \quad (1)$$

ここに、 ρ , G , μ , u はそれぞれ土の密度、せん断弾性係数、粘性係数および水平変位である。ところで、土の減衰は粒子速度にかかわらず一定とされることが多い。このとき式(1)は複素剛性 $G^* = (1+i/Q)$ により次式で表され、応答は重複反射理論により周波数領域で計算される。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

ただし、 Q は地盤の減衰特性を表す定数であり、 Q 値と呼ばれる。 i は虚数単位である。

一方、地盤を図-2のせん断型多質点系モデルに置換するとき、質点の運動方程式は次式で表される。

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f \quad (3)$$

ここに、 M , C , K , u , f はそれぞれ質量、粘性減衰、せん断剛性の各行列および水平変位と外力項のベクトルである。このとき質点の質量および質点間のせん断剛性は、次のように近似的に求められる¹⁾。

$$I) \quad m_1 = \rho_1 H_1 / 2; \quad m_i = (\rho_{i-1} H_{i-1} + \rho_i H_i) / 2 \quad i=2, \dots, n$$

$$II) \quad k_i = \rho_i V_i^2 / H_i \quad i=1, \dots, n$$

ただし、 V_i は $V_i = \sqrt{G_i / \rho_i}$ で得られるS波の伝播速度である。しかし、粘性減衰係数 c は直接連続体モデルのパラメータと関係づけることができない。ところで、集中質点法では、一般にモード解析がなされるため、減衰係数は直接評価されず、モード減衰定数として適当な値が与えられる。しかし、そのモード解析法もやはり粘性型の減衰を仮定するものである。そこで、質点系についても連続体と同様に、相対変位に依存する減衰を考えると、運動方程式は次式となる。

$$M\ddot{u} + K^* u = f \quad (4)$$

ただし、 $K^* = (1+iC/K)$ は複素剛性である。式(2)と式(4)の G^* と K^* は、それぞれ連続体と質点系について導いた係数であるが、単純に比較すると、 Q 値と非粘性の減衰係数 c の間には、 $c=k/Q$ の関係があると考えら

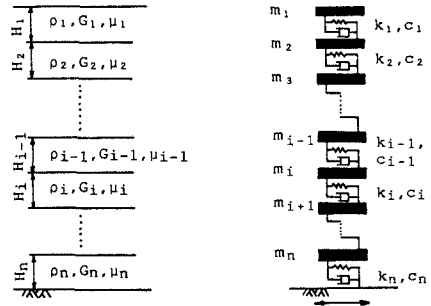


図-1 連続体モデル 図-2 質点系モデル

れる。そこで、質点系モデルにおける非粘性減衰係数を次のように求めることとする。

$$\text{III) } c_i = \rho_i V_i^2 / H_i / Q_i \quad i=1, \dots, n$$

3. 解析結果および考察 ここでは、図-3に示すような均質地盤について、重複反射法と集中質点法で計算した周波数応答倍率を比較することにより、モデルの等価性を調べる。図-4の(a)に、質点系モデルの減衰を非粘性型としたときの解析結果を示す。また、(b)には比較のため、質点系の減衰を粘性型とした場合についても示す。(a)の周波数応答倍率はよく対応している(実線と破線が重なっている)のに対し、(b)では2次以上のピークに違いがみられる。このように、質点系のパラメータをI)~III)により求めたとき、重複反射法と集中質点法から、ほぼ同一の周波数応答倍率が得られ、連続体モデルと離散型モデルの等価性が成り立つことがわかった。なお、質点系の解析においては、(a)、(b)とも質点数を20とした。

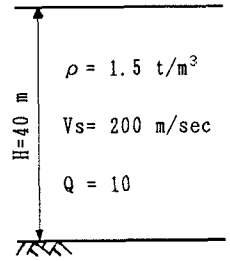


図-3 均質地盤

つぎに、重複反射法とモード解析法の等価性を検討するために、重複反射法により計算した周波数応答倍率について、4次モードまでのモードパラメータの同定を行った。表-1に同定された各次モードの固有振動数、モード減衰定数と固有値解析により求めたモード固有振動数を示す。モード固有振動数は固有値解析によるものとほぼ一致している。また、モード減衰定数は各モードともほぼ5%であり、Q値の2倍の逆数として得られている²⁾。図-4の(c)にモード解析により求めた質点系の周波数応答倍率と重複反射法によるそれを示しており、ほぼ一致しているのがわかる。

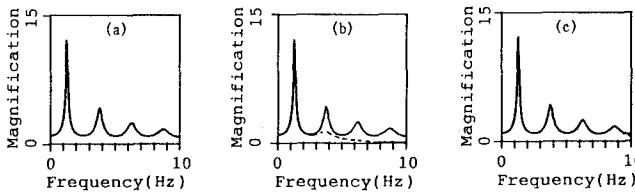


図-4 連続体モデル(実線)と質点系モデル(破線)の周波数応答倍率

表-1 モードパラメータの同定結果

次数	同定結果		固有値解析
	固有振動数	減衰定数	固有振動数
1	1.251 (Hz)	0.049	1.250 (Hz)
2	3.749	0.051	3.750
3	6.250	0.047	6.250
4	8.738	0.048	8.750

ところで、モード減衰定数 ($h_i, i=1, \dots, n$) は減衰行列 $\mathbf{C}$ と式(5)の関係にある。

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \begin{bmatrix} 2h_1 \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 2h_n \omega_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{C} = \Phi^T{}^{-1} \begin{bmatrix} 2h_1 \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 2h_n \omega_n \end{bmatrix} \Phi^{-1} \quad (6)$$

ただし、 Φ は各次の固有振動形により構成される行列であり、 ω は各次の固有円振動数である。したがって、減衰行列は式(6)により得られる。いま、図-3の地盤を4質点系モデルに置換するものとし、各次のモード減衰定数を5%とした場合、減衰行列は式(6)より、式(7)のように得られる。このように、粘性型の減衰を仮定しても減衰行列は存在することがわかる。しかし、この減衰行列はモード解析を可能ならしめるための数学的条件であり、このような減衰行列を持つ減衰特性を物理的に説明することは困難である。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4.150 & -1.203 & -0.229 & -0.071 \\ -1.203 & 3.926 & -1.343 & -0.228 \\ -0.229 & -1.343 & 3.694 & -1.271 \\ -0.071 & -0.228 & -1.271 & 1.958 \end{bmatrix} \quad (7)$$

4. まとめ 質点系において非粘性型の減衰を仮定することにより、重複反射法と集中質点法から、同じ周波数応答倍率が得られた。また、質点系の減衰を、一般に考えられているように、粘性型とした場合でも、モード減衰定数を介して、重複反射法におけるQ値に対応する減衰行列を導くことができるが、そのような系の減衰機構の物理的解釈は困難である。

参考文献

- 1) 土質工学会編, 土質地震工学, 土質工学会, pp.124, 1984年
- 2) 土岐憲三, 構造物の耐震解析, 技報堂出版, pp.79, 1981年