I-393　はさみ込み法による格子桁の自由振動解析

鳥取大学　正員　神部　俊一
鳥取大学　学生員　○市川　章夫
西松建設（株）正員　岩井　栄治

１．まえがき

格子桁のように同じ形態の構造部分が繰り返し現われる構造物を解析するのに、有限要素法と還元法を組み合わせた解析手法であるＦＥＴＭ法[1]を用いると効率が良い。 しかし、還元法を用いて上記の構造の曲げ自由振動性状を解析する場合に、特に、高い振動数領域において格間行列に含まれる双曲線関数の値が著しく大きくなって桁落ちが生じ、それが誤差を発生させる原因となる。 この誤差を低減するのに効果のある解析方法が還元法の変種である”はさみ込み法”[2]である。 本報は図－１に示す格子桁にこの解法を適用して数値解析を行ない、その曲げ自由振動の力学的性状を明らかにする。

２．解析方法

１－１　格間行列と格点行列

単一部材の曲げ自由振動を支配する方程式はたわみＶに関する４階の微分方程式であるが、その一般解は積分定数A_i (i=1,2,3,4)とし、部材軸方向の座標をｚとすると次式で与えられる。

$$\overline{\mathbf{V}}(\bar{z}) = \overline{\mathbf{A}}_1 \cosh\bar{\lambda}\,\bar{z} + \overline{\mathbf{A}}_2 \sinh\bar{\lambda}\,\bar{z} + \overline{\mathbf{A}}_3 \cos\bar{\lambda}\,\bar{z} + \overline{\mathbf{A}}_4 \sin\bar{\lambda}\,\bar{z}\quad,\quad \bar{z} = \frac{z}{\ell_0} \qquad (1)$$

ここに、$\bar{\lambda}^4 = \dfrac{m_0\omega}{EI_0}\ell_0^4$　　EI_0: 部材の基準曲げ剛性，　ω: 固有円振動数，
m_0: 部材の単位長さ当たりの基準質量，　ℓ_0: 部材の基準長　（２）

なお、上付きの横棒記号は無次元量であることを示している。 上式とその導関数とを利用して、積分定数を部材両端の節点力と節点変位で表わし、得られた式を変形すれば、節点力と節点変位とを関係付ける剛性マトリクスが求まる[3]。そして、図－２に示す分割構造モデルのそれぞれの部分構造に対して剛性方程式を作成する。

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{S}}_L \\ \overline{\mathbf{S}}_R \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{LL} & \overline{\mathbf{K}}_{LR} \\ \overline{\mathbf{K}}_{RL} & \overline{\mathbf{K}}_{RR} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{u}}_L \\ \overline{\mathbf{u}}_R \end{bmatrix}_i \qquad (3)$$

ここに、$\overline{\mathbf{K}}$：部分構造i における剛性マトリクス
$\overline{\mathbf{S}}$：部分構造i における節点力を成分とする列ベクトル
$\overline{\mathbf{u}}$：部分構造i における節点変位を成分とする列ベクトル

なお、添字L,R は部分構造の左端と右端を意味している。 従って、式(3) を変形すると右端の状態量ベクトル $\overline{\mathbf{y}}_{iR}$ と左端の状態量ベクトル $\overline{\mathbf{y}}_{iL}$ を関係付ける格間行列 $\overline{\mathbf{F}}_i$ が次のように求まる。

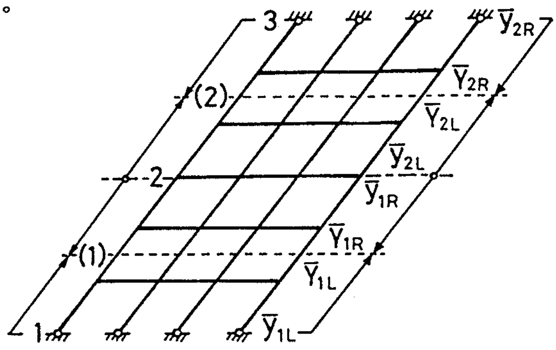
$$\overline{\mathbf{y}}_{Ri} = \overline{\mathbf{F}}_i\,\overline{\mathbf{y}}_{Li} \qquad (4)$$

ここに、$\overline{\mathbf{y}}_{Ri} = [\overline{\mathbf{u}}_{Ri}{}^T \mid \overline{\mathbf{S}}_{Ri}{}^T]^T$，$\overline{\mathbf{y}}_{Li} = [\overline{\mathbf{u}}_{Li}{}^T \mid \overline{\mathbf{S}}_{Li}{}^T]^T$

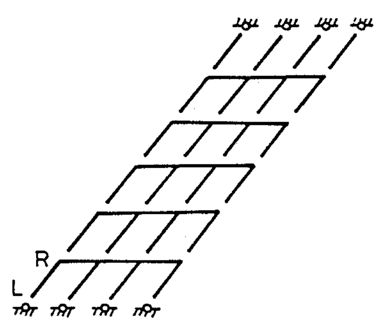
$$\overline{\mathbf{F}}_i = \begin{bmatrix} -\overline{\mathbf{K}}_{LR}{}^{-1}\overline{\mathbf{K}}_{LL} & \overline{\mathbf{K}}_{LR}{}^{-1} \\ \overline{\mathbf{K}}_{RL}{}^{-1}\overline{\mathbf{K}}_{RR}\overline{\mathbf{K}}_{LR}{}^{-1}\overline{\mathbf{K}}_{LL} & \overline{\mathbf{K}}_{RR}\overline{\mathbf{K}}_{LR}{}^{-1} \end{bmatrix}$$

また、直接剛性法において用いられる状態量に対する符号の定義に注意すると、格点行列は次式で表わされる。

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{u}}_L \\ \overline{\mathbf{S}}_L \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{E}} & 0 \\ 0 & -\overline{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{u}}_R \\ \overline{\mathbf{S}}_R \end{bmatrix}_i \qquad (5)$$



図－１　解析用構造モデル



図－２　分割構造モデル

ここに、$\overline{\mathbf{E}}$: 単位行列

１－２　はさみ込み法による自由振動解析

図ー１に示す構造モデルを２つの部分構造(1~2、2~3)に分割し、それぞれの部分構造の両端から還元法による演算を進めて行き、格点（１）と（２）における状態量ベクトルを算出する。
各部分構造の左端と右端における状態量ベクトルは次式により関係付けられる。

$$\overline{\mathbf{Y}}_{iL}=\overline{\mathbf{N}}_{iL}\overline{\mathbf{y}}_{iL},\qquad \overline{\mathbf{Y}}_{iR}=\overline{\mathbf{N}}_{iR}\overline{\mathbf{y}}_{iR},\qquad \overline{\mathbf{Y}}_{iL}=\overline{\mathbf{C}}_{0}\,\overline{\mathbf{Y}}_{iR}\qquad (6)_{1\sim3}$$

ここに、$\overline{\mathbf{Y}}_{iL}$, $\overline{\mathbf{Y}}_{iR}$: 部分構造（ｉ）の両端から求められた各点(i) の左端と右端における状態量ベクトル

$\overline{\mathbf{y}}_{iL}$, $\overline{\mathbf{y}}_{iR}$: 部分構造の両端における初期状態量ベクトル

$\overline{\mathbf{N}}_{iL}$, $\overline{\mathbf{N}}_{iR}$: 境界行列と格間行列および格点行列の乗算の繰り返しにより求まる伝達行列

$\overline{\mathbf{C}}_{0}$: 両端から求められた状態量ベクトルが任意点で一致するという条件を表示するために導入された接続行列

ここで、式$(6)_{1\sim3}$の関係式と分割点２の左端と右端における状態量ベクトルの間に成立する関係式を利用すると、左端と右端および中間点の状態量ベクトルを未知量とする同次連立一次方程式が得られる。　従って、超越方程式である振動数方程式がこの方程式の係数行列より次式で求まる。

$$\det\overline{\mathbf{K}}\,(\overline{\lambda})=0 \qquad (7)$$

ここに、$\overline{\mathbf{K}}\,(\overline{\lambda})$ は $\overline{\lambda}$ に従属する物理量を成分とする行列である。　従って、式(7) を満足する $\overline{\lambda}$ を用いると、低次から高次までの固有円振動数と、それらに対応する自由振動モードとが算出できる。

３．数値計算例

以上の解析方法を構造モデルに適用して得られた数値計算の結果を示す。　支間長６ℓ、主桁間隔 0.6ℓ、横桁間隔はℓとし、また、横桁の曲げ剛性は主桁のそれの1/4 とした。　$\overline{\lambda}$ の値を表ー１に、固有振動モードを図－３に示す。

４．あとがき

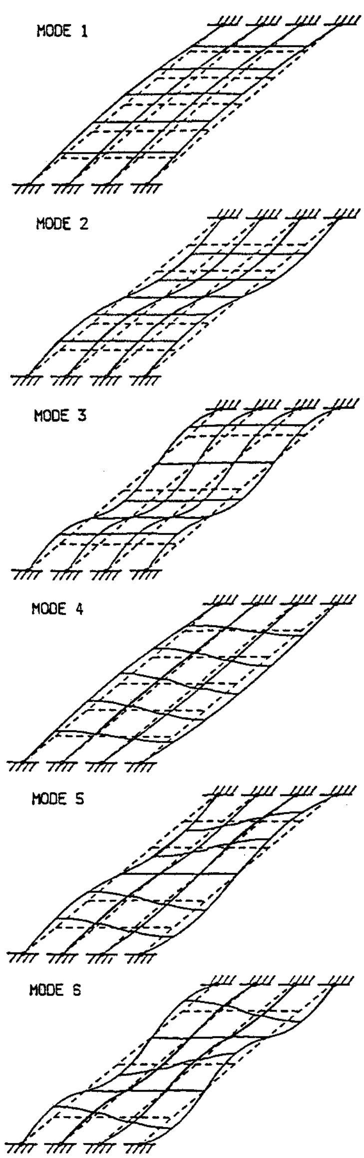
本研究は、ＦＥＴＭ法とはさみ込み法を併用すれば、格子桁の自由振動性状を明らかにできることを示した。　この解析手法を用いることによって、還元法で問題となる数値誤差の発生を軽減でき、より長大な骨組構造物の解析に対しても、効果的に対処できるのではないかと考えている。

参考文献）

１）Ｅ．Ｃ．ペステル，Ｆ．Ａ．レキー共著：マトリクス弾性力学，ブレイン図書出版，pp. 148~151
２）神部俊一，田中善昭，甲斐龍二：はさみ込み法による多室断面鋼製箱桁の断面変形挙動解析，構造工学論文集VOL. 34A pp. 101 ~110
３）Clough.R.W ,PENZIEN.J : Dynamics of Structures, McGRAW—HILL BOOK COMPANY ,pp. 346~351

表ー１　固有値 $\overline{\lambda}$

次数	$\overline{\lambda}$
1	0.47715
2	0.95410
3	1.42978
4	1.58200
5	1.63365
6	1.81554
7	1.90047
8	2.13836
9	2.14515
10	2.16479



図ー３　固有振動モード