Ⅰ-384　測定データのばらつきを考慮した構造同定と同定パラメータの信頼度

東京電機大学　理工学部　○正　員　松井邦人
東京電機大学　大 学 院　　学生員　三瓶辰之
日本鋪道㈱　　技 術 部　　正　員　井上武美

１．はじめに

構造特性の推定、構造劣化診断等でしばしば非破壊試験が行われている。これは構造物に荷重を作用させ、着目点で測定したたわみデータから判断するものである。同定手法としてカルマンフィルタ、ベイズ理論に基づく方法、ガウス・ニュートン法等を用い未知パラメータを同定できる。しかし測定値にはばらつきが存在し、その平均値が真のたわみではない。従って同定結果は、評価関数の選定、測点位置、測点数、測定データのばらつきの影響を受ける。本研究ではこれらのことを考慮して、与えられた信頼度に対応するパラメータの値の信頼区間について検討する。

２．評価関数に関する検討

同定パラメータをx_m(m=1,…,M)、測点nでの測定たわみをu_n、対応する解析たわみを$z_n(\mathbf{x})$とする。一般に評価関数は、

$$J_1=\sum_{n=1}^{N} w_n\ \{u_n-z_n(\mathbf{x})\}^2 \qquad (1)$$

と選定し、同定問題は上式を$\mathbf{x}$に関して最小化する問題となる。w_nは重み係数であり、$w_n=\sigma_0^2/\sigma_n^2$、ただし$\sigma_n^2$は測点nでの分散、$\sigma_0^2$は無次元化のための定数で、すべての測点で一定である。式(1)は次のようになる。

$$J_2=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2}\{u_n-z_n(\mathbf{x})\}^2 \qquad (2)$$

各測点で分散が等しいとき、$\sigma_n^2=\sigma_0^2$ (n=1,…,N)、式(2)は

$$J_3=\sum_{n=1}^{N}\{u_n-z_n(\mathbf{x})\}^2 \qquad (3)$$

また、すべての測点で変動係数が一定のとき$\delta=\sigma_n/u_n$ (n=1,…,N)。そこで$\sigma_0^2=\delta^2$と選択すると式(2)は、

$$J_4=\sum_{n=1}^{N}\{1-\frac{z_n(\mathbf{x})}{u_n}\}^2 \qquad (4)$$

式(3)は各測点でたわみ誤差の２乗和であるのに対し、式(4)はたわみ不一致度の２乗和と考えることができる。また式(3)は式(4)に重み$w_n=u_n^2$を掛けたものと一致する。式(4)は、各測点での測定たわみを同じように重視しているのに対し、式(3)はたわみの大きな測点を重視していると考えることができる。

３．測定回数の決定

各測点のたわみに含まれる誤差はランダムで、それぞれ正規分布しているとする。測点nのたわみの母集団平均をu_n、N個の標本の平均値をd_n、標準偏差をS_nとすると、$(u_n-d_n)/(S_n/\sqrt{N})$は自由度N-1のｔ分布に従う。従って、

$$d_n-t_{\alpha/2,N-1}\frac{S_n}{\sqrt{N}}< u_n< d_n+t_{\alpha/2,N-1}\frac{S_n}{\sqrt{N}} \qquad (5)$$

上式は信頼度$(1-\alpha)$の母集団平均値の範囲である。信頼度95%の範囲と測定回数の関係を図示すると図-1のようになる。

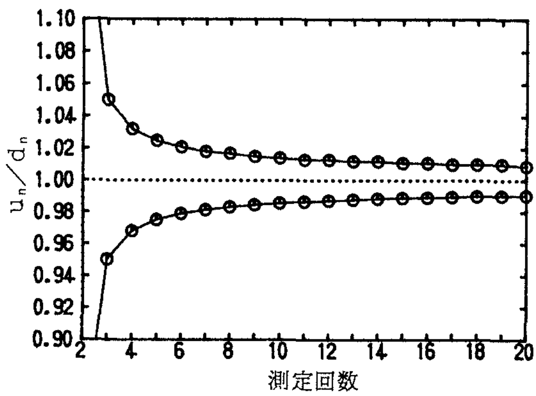


図-1 測定回数とu_n/d_nの関係

４．同定パラメータの信頼区間

測点nの測定たわみの平均値をd_n(n=1,…,N)、解析たわみをz_nとする。z_nは未知パラメータx_m(m=1,…,M)の関数である。パラメータx_mはd_nとz_nの差の２乗和を最小とするように決定できる。即ち、

$$\min J = \min_{x_m} \sum_{n=1}^{N}\{d_n-z_n(x_m)\}^2 \qquad (6)$$

上式は一種のTaylor展開すると考えると、式(2)は近似的に

$$\min J = \min_{\delta x_m} \sum_{n=1}^{N}\{d_n-z_n(x_m)-\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial z_n}{\partial x_m}\ \delta x_m\}^2 \qquad (7)$$

となり、δx_mに関する最適化問題となる。必要条件

より

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial z_n}{\partial x_m}\frac{\partial z_n}{\partial x_\ell}\delta x_m=\sum_{n=1}^{N}\{d_n-z_n(x_m)\}\frac{\partial z_n}{\partial x_\ell}\quad(8)$$
$$(\ell=1,\cdots,M)$$

一方、同定パラメータx_mは測定たわみd_nに依存している。d_nには誤差が含まれていることを考慮し、一般に$d_n=\bar{d}_n+\Delta d_n$と書くことができる。各測点での誤差に相関がないとすると、

$$x_m(\bar{d}_n+\Delta d_n)\fallingdotseq x_m(\bar{d}_n)+\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial x_m}{\partial d_n}\Delta d_n\qquad(9)$$

従って、

$$\mathrm{Var}(x_m)\fallingdotseq\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial x_m}{\partial d_n}\right)^2 S_n^2\qquad(10)$$

ただしS_nは、測点nにおける誤差の標準偏差である。評価関数として式(3)を用いると式(7)、式(9)より、

$$\begin{aligned}\min J&=\min\Big[\sum_{\substack{n=1\\n\neq\ell}}^{N}\{\bar{d}_n-z_n(\bar{x}_m)-\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial z_n}{\partial x_m}\lambda_{m\ell}\Delta d_\ell\}^2\\&\quad+\{\bar{d}_\ell+\Delta d_\ell-z_\ell(\bar{x}_m)-\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial z_\ell}{\partial x_m}\lambda_{m\ell}\Delta d_\ell\}^2\Big]\\&=\min\Big[\sum_{\substack{n=1\\n\neq\ell}}^{N}\{-\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial z_n}{\partial x_m}\lambda_{m\ell}\}^2(\Delta d_\ell^2)\\&\quad+\{1-\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial z_\ell}{\partial x_m}\lambda_{m\ell}\}^2(\Delta d_\ell^2)\Big]\qquad(11)\end{aligned}$$

上式において$(\Delta d_\ell)^2$の大きさは任意であり、　$\lambda_{m\ell}=\partial x_m／\partial d_\ell$は未知である。これは式(11)を最小とする必要条件$\partial J／\partial\lambda_{m\ell}$から決定できる。

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial z_n}{\partial x_m}\frac{\partial z_n}{\partial x_k}\lambda_{m\ell}=\frac{\partial z_\ell}{\partial x_k}\qquad(12)$$
$$(k=1,\cdots,M)$$

上式は$\lambda_{m\ell}$に関するM元線形連立方程式であり、容易に解くことができる。

評価関数に式(4)を用いると、

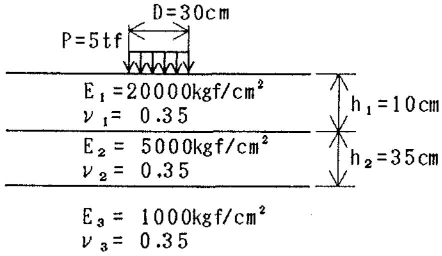
$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{u_n^2}\frac{\partial z_n}{\partial x_m}\frac{\partial z_n}{\partial x_k}\lambda_{m\ell}=\frac{1}{u_\ell^2}\frac{\partial z_\ell}{\partial x_k}\qquad(13)$$
$$(k=1,\cdots,M)$$

5．例題

図-2のような３層モデルを対象として同定パラメータの標準偏差と測点の個数について検討する。過去の事例より、フォーリングウェイトデフレクトメータを用いると各測点での変動係数がほぼ0.02であることがわかっており、このとき各同定パラメータの標準偏差と測点数の関係を図-3に示す。

6．あとがき

同定結果の精度は、測定回数、測点位置、測点数だけでなく評価関数の選定も含めて考える必要がある。



図－２　３層モデル

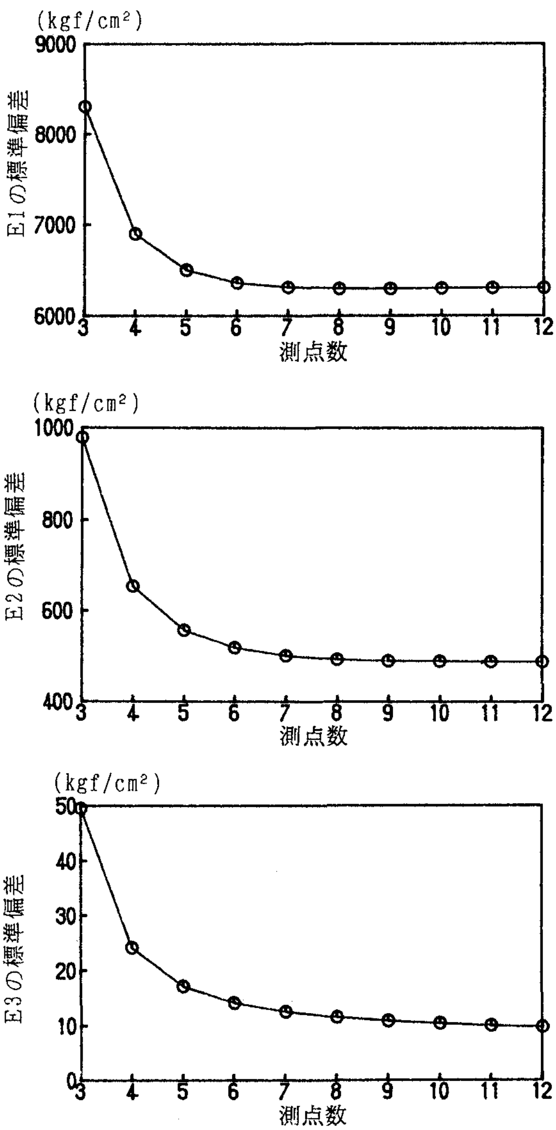


図-3 同定パラメータの標準偏差と測点数の関係（測定間隔は20cm）