

I-243

不完全合成桁の固有振動周期について

北海道大学工学部 正員 佐藤 浩一

1. まえがき

合成桁はジベルの合成効果により次の3つに分類されている。(1)ジベルが完全に剛である場合が完全合成桁($K=\infty$), (2)ジベルの弾性変形を考慮する場合が不完全合成桁($0 < K < \infty$), (3)ジベルの合成効果が全くない場合が重ね梁($K=0$)。ここで、 K はジベルのばね定数であり、重要な定数である。さらに、文献⁴⁾では構造特性を求めるために α , β , γ の無次元量のパラメータを導入して静的解析結果を整理している。一方、動的解析に関しての報告はほとんどないようである。

本報告は不完全合成桁の曲げ振動に関する運動方程式を示し、動的解析の基本である固有振動周期を求め、完全合成桁を基準にして設計に便利な無次元量パラメータ α , β , γ を導入して整理したものである。

2. 不完全合成桁の曲げ振動に関する運動方程式

図-1は合成桁の合成断面を示している。不完全合成桁のたわみに関する微分方程式は次の2個の微分方程式である^{2), 3)}。記号、誘導などの詳細は文献^{2), 3)}を参照。

$$\begin{cases} \frac{d^4 y_v}{dx^4} = \frac{p}{E_s I_v} & \dots\dots\dots (1a) \\ \frac{d^4 y_e}{dx^4} - \kappa^2 \frac{d^2 y_e}{dx^2} = \frac{p}{E_s I_e} & \dots\dots\dots (1b) \end{cases}$$

ここで、

$$\kappa^2 = K \frac{n I_v}{n I_s + I_c} \cdot \frac{n}{E_s A_c} \cdot \frac{s}{s_c}, \quad I_e = I_v \frac{n I_s + I_c}{A_c s_c s} \quad \dots (2)$$

式(1a)は図-2(a)に示すような完全合成桁の静的問題に帰着される。また、式(1b)は図-2(b)に示すような両端で水平方向に大きさ $H = E_s I_e \cdot \kappa^2$ の一定軸方向力が作用する桁の静的問題に帰着される。なお、式(1b)は吊橋の補剛桁に関する撓度理論および直線桁の曲げねじり理論と同形の微分方程式である。桁の曲げ振動に関する運動方程式を導くには、桁の断面に作用する力の釣合方程式と、桁のたわみ-曲げモーメントの関係をいれればよい。 w を単位長さあたりの桁の重量、 g を加速度とすれば、D'Alembertの原理より、

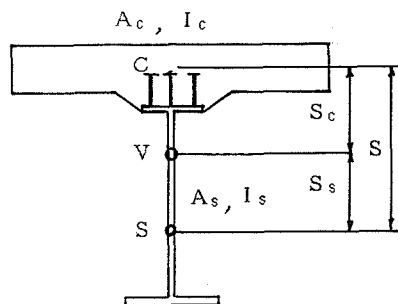


図-1 合成断面

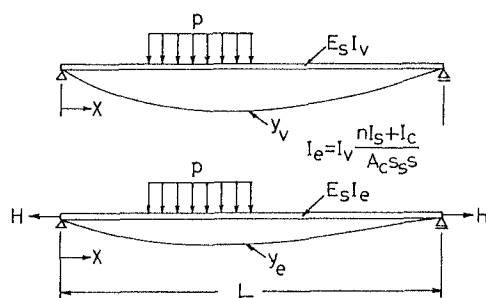


図-2 不完全合成桁と等価な桁

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 y_v}{\partial x^4} = \frac{p}{E_s I_v} - \frac{w}{E_s I_v g} \frac{\partial^2 y_v}{\partial t^2} & \dots\dots\dots (3a) \\ \frac{\partial^4 y_e}{\partial x^4} - \kappa^2 \frac{\partial^2 y_e}{\partial x^2} = \frac{p}{E_s I_e} - \frac{w}{E_s I_e g} \frac{\partial^2 y_e}{\partial t^2} & \dots\dots\dots (3b) \end{cases}$$

3. 両端がピン支持の場合の固有振動周期

式(3a), (3b)の m 次の固有円振動数を ${}_m \omega_v$, ${}_m \omega_e$ とし、固有振動周期を ${}_m T_v$, ${}_m T_e$ とすれば、

$${}_m \omega_v = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 \frac{g E_s I_v}{w}} \quad \dots (4a), \quad {}_m \omega_e = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 \frac{g E_s I_e}{w} + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \frac{g H}{w}} \quad \dots (4b)$$

固有振動周期は曲げ剛性の平方根に逆比例するから、次式の周期の自乗比 γ を考えてみる。

$$\gamma = \left(\frac{m T_e}{m T_v}\right)^2 = \left(\frac{m \omega_v}{m \omega_e}\right)^2 = \frac{I_v}{I_e} \cdot \frac{1}{1 + (\kappa L / m \pi)^2} = \frac{A_c S_c S}{n I_s + I_c} \beta \quad \dots\dots(5)$$

ここで、
$$\beta = \frac{1}{1 + (\kappa L / m \pi)^2}, \quad \alpha = 1 - \beta \quad \dots\dots(6)$$

のパラメータを導入すれば、不完全合成桁の固有振動周期 $m T_v$ は次式で求まる。

$$m T_{ve} = \sqrt{m T_v^2 + m T_e^2} = m T_v \sqrt{1 + \gamma} \quad \dots\dots(7)$$

具体的には

$$m T_{ve} = m T_v \sqrt{\frac{I_{cs} + \beta \cdot I_{csv}}{I_{cs}}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{L}{m}\right)^2 \sqrt{\frac{w}{g E_s I_v} \cdot \frac{I_{cs} + \beta \cdot I_{csv}}{I_{cs} \cdot (I_{cs} + I_{csv})}} \quad \dots(8)$$

ここで、 $I_{cs} = I_s + I_c / n$, $I_{csv} = A_c S_c S / n$, $I_v = I_{cs} + I_{csv}$ $\dots\dots(9)$

I_v = 完全合成桁の断面二次モーメントである。なお、 $\beta = 0$ ならば完全合成桁、 $0 < \beta < 1$ ならば不完全合成桁、 $\beta = 1$ ならば重ね梁の固有振動周期である。 $m = 1$ の場合の α あるいは β と κL (無次元量)との関係を図示すれば図-3の通りである。図-3の α 曲線(動的解析による)は文献⁴⁾の図-5の α 曲線(静的解析による)とほとんど重なっている。このことは理論式からも証明される(あとがき参照)。

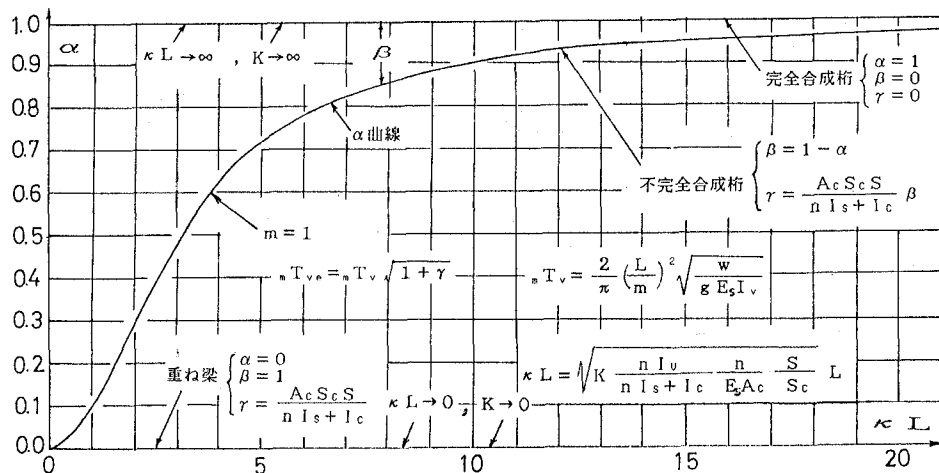


図-3 不完全合成桁の α 曲線

4. あとがき 本研究で得られた結論は次の通りである。

- 1) 両端ピン支持の場合、ばね定数 K と断面諸元を与えて式(6)の β を求めれば、完全合成桁、不完全合成桁および重ね梁の固有振動周期を式(8)で簡単に求めることができる。計算はパソコンで十分である。
- 2) 静的解析⁴⁾と動的解析(本報告)における β , γ の定義は異なっているが、計算結果はほとんど同じである。このことは文献⁴⁾の不完全合成桁の場合の静的たわみをフーリエ級数展開して、有限個のうち、第一項のみ考えて、その比をとった場合であり、有限個の和の比とほとんど同じになることからわかる。

(参考文献) 1) Newmark, N.M., Siess, C.P., Viest, I.M.: Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Analysis, Vol.9, No.1, pp.75-93, 1951. 2) 島田静雄、熊沢周明: 合成桁の理論と設計、山海堂、1973. 3) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺昇: 不完全合成桁の差分剛性マトリックス解析法について、構造工学論文集、Vol.36A, pp.1223-1236, 1990.3. 4) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺昇: 不完全合成板の解析について、構造工学論文集、Vol.36A, pp.1245-1258, 1990.3.