土木学会第45回年次学術講演会（平成２年９月）

I-238　　二層単純支持梁の振動モードについて

大阪市立大学工学部　正員　○小林　治俊
大阪市立大学工学部　正員　　園田恵一郎

【１】まえがき

二次元動弾性論に基づいた積層梁の波動特性に関する研究は古くからなされており，位相速度や変位モードが明らかにされている（例えば文献１－３）．しかし応力モードを検討した研究は少ないようである．

先に筆者ら[4)]は，衝撃荷重を受ける一層平面梁の応力波伝播特性を明らかにしたが，本文は積層梁の衝撃問題解析の前段階として，積層梁の変位・応力の振動モードの検討を行うものである．

【２】基礎式

二層梁の座標系を図１に示す．等方性平面応力問題の調和振動の支配式はは次式で与えられる．[5)]

$$G\left[\nabla^2\mathbf{U}+\mu\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathbf{U})\right]=-\rho p^2\mathbf{U} \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに，$\mathbf{U}=\mathbf{U}[U(\mathbf{x}),V(\mathbf{x})]$は固有モードを表す変位ベクトル；$\mathbf{x}=(x,y)$；$\rho$，$G$，$\nu$は各々物体の密度，せん断弾性係数，ポアソン比；$\mu=(1+\nu)/(1-\nu)$；$\nabla^2$=ラプラシアン；$p$=固有円振動数．

今，ポテンシャル$\phi_1(\mathbf{x})$，$\phi_2(\mathbf{x})$を用いて次式で表せば，

$$U=\partial\phi_1/\partial x-\partial\phi_2\partial y,\quad V=\partial\phi_1/\partial y+\partial\phi_2/\partial x \quad \cdots(2)$$

式(1)は次の波動方程式に変換される．$(i=1,2)$

$$\nabla^2\phi_i+(p/c_i)^2=0,\quad c_1=\sqrt{2G/(1-\nu)\rho},\ c_2=\sqrt{G/\rho} \quad \cdots(3)$$

ここに，c_1，c_2 $(c_1>c_2)$は縦波（膨張波）と横波（せん断波）の速度．

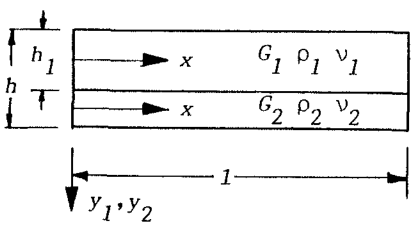

図１　座標系

はり両端の単純支持条件：

$$x=0,\ l \quad で \quad V=\sigma_x=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

を満足させるため，

$$\phi_1=\Sigma Y_1(y)\sin\alpha x,\quad \phi_2=\Sigma Y_2(y)\cos\alpha x \quad \cdots\cdots(5)$$

と置き，式(3)に代入すれば$Y_i(y)$に関する２階の微分方程式が得られ，その解は次式となる．

$$Y_1(y)=A_1\cosh(\lambda_1 y)+B_1\sinh(\lambda_1 y),\quad Y_2(y)=A_2\sinh(\lambda_2 y)+B_2\cosh(\lambda_2 y) \quad \cdots\cdots(6)$$

ここに，$\alpha=m\pi/l$，$\lambda_i=\sqrt{\alpha^2-(p/c_i)^2}$ $(i=1,2)$であり，A_1，A_2，B_1，B_2は積分定数．

【３】振動数方程式

固有振動数および変位・応力モードは（２）で求めた解を用いて，次の境界条件および連続条件より決定される振動数方程式の固有値問題として与えられる．

$$\left.\begin{array}{l} y_1=-h_1/2 \quad で \quad (\sigma_y)_1=(\tau_{xy})_1=0 \\ y_1=+h_1/2,\ y_2=-h_2/2 \quad で \quad (U)_1=(U)_2,\ (V)_1=(V)_2,\ (\sigma_y)_1=(\sigma_y)_2,\ (\tau_{xy})_1=(\tau_{xy})_2 \\ y_2=+h_2/2 \quad で \quad (\sigma_y)_2=(\tau_{xy})_2=0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(7)$$

以上８つの条件式から振動数方程式が得られ，Regula-Falsi法により固有円振動数p_{mn}を求める．ただし，m，nはそれぞれx，y方向の波数である．

【４】数値計算結果

材料定数は，上層がコンクリート，下層が鋼である場合を想定し，$\rho_1=2.4(tf/m^3)$，$\rho_2=7.85(tf/m^3)$，ν_1

$=1/6$, $\nu_2=0.3$, $E_1/E_2=1/7$とし，層厚は$h/h_1=1.0, 0.9, 0.8$の3種類，スパン/梁高比は0.2として計算を行った．

図2，図3は梁の半スパンを5分割した各断面での応力σ_x, σ_yの一次二次の曲げモードに対応する分布を示している．一層梁の場合，σ_xの一次モードはほぼ平面保持の仮定が満足されているが，二次モードでは僅かながら応力の非線形性分布が認められる．二層梁の場合σ_x, σ_y共に，下層に応力が集中して行く傾向があり，下層の層厚が大きくなるほど顕著であることが分かる．他の結果は講演当日発表する．

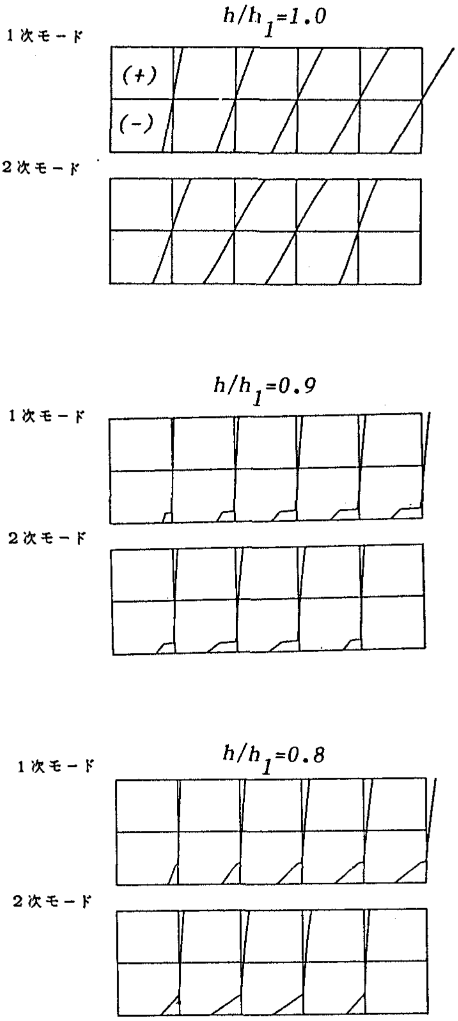

図2　応力σ_xの一次二次モード

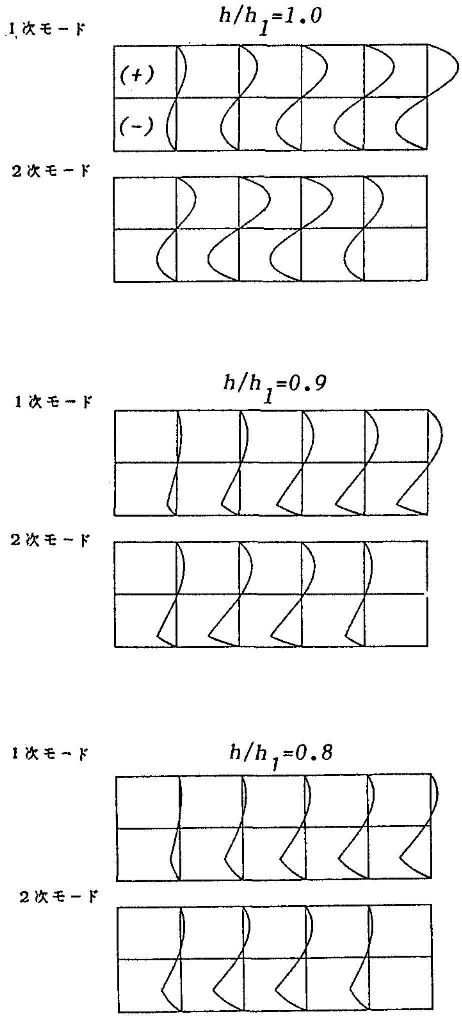

図3　応力σ_yの一次二次モード

【参考文献】 (1)Saito,H. et al.:Flexural wave propagation and vibration of laminated rods and beams, JAM, Vol.84, 1962. (2)Das,Y.C. et al.:Method of initial functions in two-dimensional elastodynamic problems, JAM, Vol.92, 1970. (3)岸徳光，他：単純支持された多層複合合成梁の横衝撃について，材料，34巻387号，1985. (4)奥田，他:衝撃荷重を受ける平面梁の応力波伝播解析，第37回土木学会年次学術講演会，1987.10. pp.87-88. (5) Kobayashi,H. et al.: Free Vibration of Simply Supported Beams of Arbitrary Depth, Mem. Fac. Eng. Osaka City University, Vol. 29, 1988.