I-237　　せん断振動に対する非線形層体の応答について

日本大学　正　員　能町純雄
日本大学　正　員　木田哲量
日本大学　正　員　阿部　忠
日本大学　正　員○澤野利章

1．概　説　振動応答を解析する場合に応力，ひずみ，変位に対してある種の力学モデルの設定することにより解析を行うことができる。本研究では，弾性の力学モデルを応力－ひずみ関係が非線形となるバネを有するモデルを設定することとし振動応答に対して，まず，非線形バネだけを考え，次に粘性を考慮しなければならないフォークト体について解析を行うこととする。このモデルを底盤に対して堅固に固定された層状の構造体に対して用い，その振動応答特性を求めて，これまで振動による水平変位を層体の深さに対するｓｉｎ関数で近似した場合と比較し考察を行う。層体に振動が強制された場合の層体自身の運動方程式は式（1）によって表すことができる。また，弾性の力学モデルである非線形バネのひずみγと応力τの関係を式（2）とする。

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1) \qquad\qquad \tau = G\left(\gamma - \frac{\gamma^3}{3\gamma_1^2}\right) \qquad (2)$$

ここで，ρ；層体の密度，u；強制振動外力による層体の変位，

G；層体の初期せん断弾性係数，γ；層体に生ずるひずみ，

τ；層体のせん断応力，γ_1；最大せん断応力に対する最大ひずみ

2．非線形バネ解析方法　層体の一般的な変位とひずみの関係より$\gamma = \partial u / \partial x$の関係が成り立つ。また，変位ｕは時間ｔの関数であることから$u = U \sin \omega t$とする。また，底面からの距離ｘをｑを係数として表すこととして$x = q\ell$とする。ここで，$\partial \phi / \partial q$を求めると式（3）となる。よって，ひずみ$\gamma$は次式で表すことができる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial q} = \frac{\partial (U/\ell\gamma_1)}{\partial (x/\ell)} = \frac{\partial U}{\partial x \gamma_1} = \eta \qquad (3)$$

次に式（3）にηを乗じ，さらにｑで積分する。また，境界条件$q=1$で$x=\ell$，つまり$\eta=0$より積分定数Cを求めると，エネルギー式として式（4）を得る。

$$\int\left(\frac{\partial \eta}{\partial q}\eta - \frac{3}{4}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial q}\eta^3\right)\partial q = \int\left(-\xi^2 \phi \frac{\partial \phi}{\partial q}\right)\partial q$$

$$\eta = \frac{\partial \phi}{\partial q} = \left[\frac{3}{4}\left\{1-\left(1-\frac{3}{2}\xi^2 (\phi_1^2 - \phi^2)\right)^{1/2}\right\}\right]^{1/2} \qquad (4)$$

ここで，ϕ_1は表面におけるϕの値

したがって，ξは次式によって表すことができる。

$$\xi = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\pi/2}\{(1+A\cos\theta)^{1/2} + (1-A\cos\theta)^{1/2})\}\partial\theta \qquad (5)$$

ここで，$A^2 = \frac{3}{2}\xi^2 \phi_1^2$

3．非線形フォークト体解析方法　非線形フォークト体は式（2）の復元力に粘性減衰力が加わることとなるので応力とひずみの関係は次式となる。

$$\tau = G\left(\gamma - \frac{\gamma^3}{3\gamma_1^2}\right) + G'\dot{\gamma} \qquad (6)$$

この式に複素関数を導入し展開してエネルギー式を求め，非線形バネの式と同様にξについて展開する。

$$\frac{\xi}{(1+ih\xi)^{1/2}}=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\pi/2}\{(1+A'\cos\theta)^{1/2}+(1-A'\cos\theta)^{1/2})\}\,\partial\theta \quad (7)$$

ここで，$A'^2=\dfrac{1}{(1+ih\xi)^2}\cdot\dfrac{3}{2}\xi^2\phi_1^2$

３．解析結果　　非線形バネに関するξの式（５）は次式のように展開することができる。

$$\xi=\int_{\theta_0}^{\pi/2}\left(1-\frac{1}{8}A^2\cos^2\theta-\frac{5}{128}A^4\cos^4\theta-\frac{21}{1024}A^6\cos^6\theta\cdots\cdots\right) \quad (8)$$

ここで，$\sin4\theta_0$，$\sin6\theta_0$は省略することとして，積分を行うこととする。

$$\xi=\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)\left(1-\frac{A^2}{16}-\frac{15A^4}{1024}-\frac{210A^6}{32768}\cdots\cdots\right)$$
$$+A^2\sin2\theta_0\left(\frac{1}{32}-\frac{5A^2}{512}-\frac{315A^4}{65536}\cdots\cdots\right) \quad (9)$$

ここで，$F_1=1-\dfrac{A^2}{16}-\dfrac{15A^4}{1024}-\dfrac{210A^6}{32768}\cdots$，$F_2=\dfrac{1}{32}-\dfrac{5A^2}{512}-\dfrac{315A^4}{65536}\cdots$

とすると，

$$\xi=\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)F_1+3\frac{P}{\xi}\left(\frac{A^2}{1.5}-\frac{P^2}{\xi^2}\right)^{1/2}F_2$$

$$\sin\theta_0=\cos\left\{\frac{\xi}{F_1}-\ +3\frac{P}{\xi}\left(\frac{A^2}{1.5}-\frac{P^2}{\xi^2}\right)^{1/2}\cdot\frac{F_2}{F_1}\right\}$$

$$\frac{P}{\cos\left\{\dfrac{\xi}{F_1}-\ +3\dfrac{P}{\xi}\left(\dfrac{A^2}{1.5}-\dfrac{P^2}{\xi^2}\right)^{1/2}\cdot\dfrac{F_2}{F_1}\right\}}\pm\frac{\xi A}{(1.5)^{1/2}}=0 \quad (10)$$

ここでF_1を一般式で表すと式（11）となる。

$$F_1=1-\sum_{n=1}\frac{(4n-3)!\ A^{2n}}{2^{(6n-2)}(2n-n)!\ (n!)^2} \quad (11)$$

Aが１に近い場合にはF_1は$n=40$程度で収束し，Aが０に近い場合には$n=10$以内で収束することを確認した。また，F_2は４項目以降は十分小さくなるものとして省略することとした上で，この関係を用いて式（10）を満足するA，P，ξを求める。このξ，Aの関係より応答加速度αを式（12）によって算出することができる。

$$\alpha=A\xi/(3/2)^{1/2} \quad (12)$$

一方，非線形フォークト体は，式（７）より明らかなように，右辺は非線形バネの場合の式（５）のAをA'に変更しただけのであり，左辺を$\xi'=\xi/(1+ih\xi)^{1/2}$によって表すこととすれば，式の展開は非線形バネの場合と同様に行うことができる。しかし，ξ'，A'は複素数であることからこれらを$\xi'=(a+bi)$として処理する必要がある。したがって，非線形フォークト体の式は（13）となる。

$$\frac{(2)^{1/2}\cdot P'}{(\cos2R+\cosh2I)^{1/2}}\pm\frac{\xi A'}{(1.5)^{1/2}}=0 \quad (13)$$

ここで，Rは複素数の実数部として，また，Ｉは虚数部として次式となる。

$$R=\left\{a-3\frac{P'}{\xi}\left(\frac{A'^2}{1.5}-\frac{P'^2}{\xi^2}\right)^{1/2}\cdot\frac{\bar{F}_2}{\bar{F}_1}\right\},\qquad I=\frac{b}{\bar{F}_1}$$

$$a=\xi\left[\frac{\{1+(h\xi)^2\}^{1/2}+1}{2}\right]^{1/2},\qquad b=-\xi\left[\frac{\{1+(h\xi)^2\}^{1/2}-1}{2}\right]^{1/2}$$

ここで，$\bar{F}_1$，$\bar{F}_2$は上記のF_1，F_2の式中の変数AをA'に変更したもの

入力のパラメータとしてP'，ξを任意に与えて，式（13）を満足するA'を探索して，式（12）中のAをA'として代入することによって，非線形フォークト体の応答加速度を求めることができる。