Ⅰ-183　等式制約法での等号条件の扱い

群馬高専　正員　平田恭久

１．はじめに

通常の最適化問題では制約条件は、不等号条件になっていることが多い。著者が開発した等式制約法と称する非線形最適化手法は、不等号条件の扱いを主眼にしたものであり、少数の等号条件は２個の不等号条件の形で処理してきた。しかしながら、多数の等号条件がある場合には、このような処理では計算量が多くなるので、等式制約法の仕組みに合った効率的な方法が必要になる。以下の記述は、２個の不等号条件の形から出発し、等式制約法の仕組みの中で等号条件を効率よく扱える方法についての考察である。

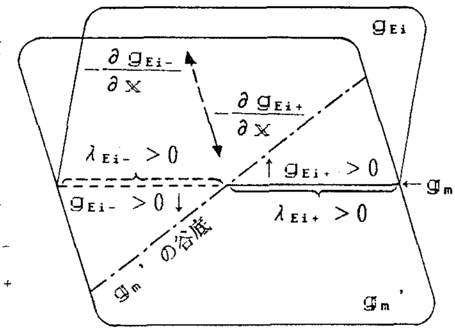
２．２個の不等号条件

$$g_{Ei}=g_{Ei}(x)=0 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} g_{Ei+}&=g_{Ei}(x)\leqq 0\\ g_{Ei-}&=-g_{Ei}(x)\leqq 0\end{aligned}\right\}\ (2)$$

$\lambda_{Ei+}<0$の発生→g_{Ei+}をg_mからはずす掃き出し→新たな探索変数による探索→g_{Ei-}に抵触→g_{Ei-}をg_mに加える掃き出し　……(3)

式(1)の等号条件g_{Ei}は、式(2)の２個の不等号条件g_{Ei+}とg_{Ei-}で置き換えられる。等号条件の最も単純な扱いは、等号条件を２個の不等号条件に分けることであり、従来のアルゴリズムがそのまま利用できる。g_{Ei}をg_{Ei+}とg_{Ei-}に分けた状態を図－１に示す。g_m'は活性な制約条件の集合である等式制約g_mからg_{Ei}を除いたものであり、g_{Ei}の制約がなければ探索はg_m'の谷底に向く。$-\partial g_{Ei}/\partial x$が許容側を示すが、場所によって$g_{Ei+}$が活性（$\lambda_{Ei+}>0$），または$g_{Ei-}$が活性（$\lambda_{Ei-}>0$）になる。



図－１　g_{Ei+}とg_{Ei-}

等号条件が不等号条件に比べてはるかに少ないときは、２個の不等号条件に分ける方法で十分であるが、この方法には次の短所がある。①タブローの制約式が等号条件に関して２倍になり、これに伴う計算量が多くなる。②g_{Ei+}からg_{Ei-}へ移行するとき（逆も同じ）、(3)に示す手順が必要であり、等号条件が多いと煩雑になる。この点を改善するためにはg_{Ei+}とg_{Ei-}を一体化して扱う必要があり、このためにはタブローでのg_{Ei+}列とg_{Ei-}列の係数を調べる必要がある。

３．g_{Ei+}とg_{Ei-}

式(2)に示すようにg_{Ei-}はg_{Ei+}に"－"を付けただけなので、タブローのg_{Ei-}列はg_{Ei+}列に－１を乗じたものになる。他の制約式g_iで掃き出したタブローを図－２に、g_{Ei+}で掃き出したタブローを図－３に示すが、ℓは掃き出し行である。掃き出し後の係数は、他のg_iが掃出し列のときには式(4)に、g_{Ei+}またはg_{Ei-}が掃き出し列のときには式(5)になるが、いずれも$j\neq\ell$行についてであり、$j=\ell$行のときは式の( )内のみになる。式(4)よりg_{Ei-}列は、掃き出し後もg_{Ei+}列に－１を乗じたものになる。式(5)より$j\neq\ell$行については、g_{Ei+}とg_{Ei-}のどちらが掃き出し列になっても他のg_i列は同じであるが、$j=\ell$行では絶対値は同じで符号のみが逆になる。

			g_i	g_{Ei+}	g_{Ei-}	
			0	a_{0Ei}'	$-a_{0Ei}'$	…
	⋮		0	⋮	⋮	
j	a_{j0}'	…	⋮ …	a_{jEi}'	$-a_{jEi}'$	…
	⋮		0	⋮	⋮	
ℓ	$\dfrac{a_{\ell 0}}{a_{\ell i}}$	…	1 …	$\dfrac{a_{\ell Ei}}{a_{\ell i}}$	$\dfrac{-a_{\ell Ei}}{a_{\ell i}}$	…
	⋮		0	⋮	⋮	

図－２　他のg_i列で掃き出し後

図－３はg_{Ei+}列での掃き出し後であるが、掃き出し行のℓ行に－１を乗ずると、式(5)よりg_{Ei-}列での掃き出し後になる。このときg_{Ei-}列のℓ行は１になり、軸要素であることを示し、g_{Ei+}列のℓ行は－１になる。よって、$a_{\ell 0}/a_{\ell Ei}=\lambda_{Ei+}<0$が生じたときは、$\ell$行に－１を乗ずることにより$g_{Ei-}$が活性

な制約式になり、$\lambda_{Ei-}>0$が確保される。このようにしてg_{Ei+}からg_{Ei-}への切り換えが行われるが（逆も同じ），(3)に示した手順に比べ、非常に簡単な処理でg_{Ei+}からg_{Ei-}へ移行できる。

g_{Ei+}とg_{Ei-}の係数について掃き出し前と掃き出し後を示したが、g_{Ei+}とg_{Ei-}の間には規則性があることが分かった。これを利用すると、g_{Ei+}とg_{Ei-}の両方をタブローに載せる必要はなく、g_{Ei+}列のみで代表させることが可能である。これにより上記２．で述べた短所①が改善される。g_{Ei+}とg_{Ei-}のどちらを活性な制約式にするかについては、$\lambda_{Ei}>0$が確保されるようなg_{Ei+}とg_{Ei-}との切り換え方法が明らかになったが、これも両者の間の規則性から導かれたものである。これにより上記２．で述べた短所②が改善される見通しが得られる。

		g_i	g_{Ei+}	g_{Ei-}	
		… a_{0i}' …	0	0	…
	⋮	⋮	0	0	
j	a_{j0}'	… a_{ji}' …	⋮	⋮	…
	⋮	⋮	0	0	
ℓ	$\dfrac{a_{\ell 0}}{a_{\ell Ei}}$	… $\dfrac{a_{\ell i}}{a_{\ell Ei}}$ …	1	−1	…
	⋮	⋮	0	0	

図－３　g_{Ei+}列で掃き出し後

４．軸要素の選択

等号条件の扱いでの残された問題点は、掃き出し行の選択をどのようにするかである。ここでは２個の不等号条件が基本なので、式(7)の不等号条件g_{Ii}の行選択規則を出発点にする。g_{Ei+}とg_{Ei-}は符号が逆なので、g_{Ei+}列のみのタブローで行を選択すると、g_{Ei+}側では$min(a_{j0}/a_{jk})$かつ$a_{j0}/a_{jk}\geqq 0$，g_{Ei-}側では$min\,|a_{j0}/a_{jk}|$かつ$a_{j0}/a_{jk}<0$であり、両者では異なった行を選択する。このような行選択の不一致は、g_{Ei+}とg_{Ei-}との切り換えに不都合を生ずるので、両者を統一したものが式(6)の行選択である。

g_{Ei}の行選択に伴い、他の制約式g_iに新たな$\lambda_i<0$が生じないようにするのが式(6)の行選択規則であり、式(9)の$a_{j0}'=\lambda_i\geqq 0$が成立すればよい。式(6)の行選択規則について調べてみると、式(9)の$a_{j0}'\geqq 0$が成立することが確かめられる。等号条件では*Lagrange*乗数λ_{Ei}の正負は問題にしなくてもよいので、他のλ_iに新たな負が生じないような行選択であればよい。よって、$\lambda_{Ei+}<0$が生じてもg_{Ei+}が掃き出し列のままでも構わない。

g_{Ei+}とg_{Ei-}との切り換えを行う場合は(8)の手順を実行すればよく、この切り換えに伴って新たな$\lambda_i<0$は生じない。g_{Ei}がすでに掃き出されている行を掃き出し行に選ぶと、そのg_{Ei}をまた新たに掃き出す必要が生ずるので、式(6)，(7)ではg_{Ei}の掃き出し行を選択範囲から除いている。なお、式(6)，(7)の列の選択は当然のことであり、軸要素k列ℓ行が選択される。

他のg_iが掃き出し列
①g_{Ei+}列：$a_{jEi}'=a_{jEi}-(a_{\ell Ei}/a_{\ell i})\,a_{ji}$
②g_{Ei-}列：$-a_{jEi}'=-a_{jEi}-(-a_{\ell Ei}/a_{\ell i})\,a_{ji}$　……(4)

他のg_i列について
①g_{Ei+}が掃き出し列：$a_{ji}'=a_{ji}-(a_{\ell i}/a_{\ell Ei})\,a_{jEi}$
②g_{Ei-}が掃き出し列：$a_{ji}'=a_{ji}-(a_{\ell i}/-a_{\ell Ei})\cdot -a_{jEi}$　……(5)

等号条件g_{Ei}
①列の選択：g_{Ei+}列をk列とする
②行の選択：等号条件の掃き出し行を除いたｊ行で
$\min_j\,|a_{j0}/a_{jk}|$をℓ行とする　……(6)

不等号条件　g_{Ii}
①列の選択：$-g_{Ii}<0$の列をk列とする
②行の選択：等号条件の掃き出し行を除いたｊ行で
$\min_j\,(a_{j0}/a_{jk})$かつ
$a_{j0}/a_{jk}\geqq 0$をℓ行とする　……(7)

g_{Ei}の掃き出し行に−１を乗ずるとg_{Ei+}とg_{Ei-}の切り換えが生じ、g_{Ei+}列の軸要素が１ならg_{Ei+}、−１ならg_{Ei-}が掃き出し列である　……(8)

$$a_{j0}'=a_{jEi}\,(a_{j0}/a_{jEi}-a_{\ell 0}/a_{\ell Ei})\quad\cdots\cdots(9)$$

５．まとめ

多数の等号条件を等式制約法の中で効率よく処理するために考察を行ったが、目的にかなったアルゴリズムを得ることができた。最終的な成果は等号条件での軸要素選択の式(6)，g_{Ei+}とg_{Ei-}との切り換え手順の(8)である。等号条件での行選択規則は結果として、連立１次方程式の解法である掃き出し法での軸要素選択と似た形になった。