I-182　非線形目標計画法によるトラスの多目的最適化

八戸工業高等専門学校　正会員　斉藤　進
早稲田大学理工学部　正会員　堀井　健一郎
早稲田大学理工学部　正会員　依田　照彦

１．まえがき　従来の構造最適化の多くは、複数の目的のうちの一つを目的関数とし、残りのいくつかを制約とした単一目的モデルによって実行されて来たが、場合によっては、複数の目的関数のまま、それらの最小（大）化を計る方が現実的といえる。本研究は、トラスについて、重量（体積）と変位を目的関数に選んだモデルを設定し、非線形目標計画法による多目的（２目的）最適化を試みたものである。

２．非線形目標計画法の定式化

非線形目標計画法は、制約 $g_j(\mathbf{X}) \leq 0, (j=1,2,\cdots,J)$ のもとで、各目的関数 $f_i(\mathbf{X}), (i=1,2,\cdots,I)$ と、その目標値 $f_i{}^*$ との差異を最小にする決定（設計）変数 $\mathbf{X}$ の値を求める計画法であり、次のように定式化できる。

find　$\mathbf{X} = \{x_1,\cdots,x_n,\cdots,x_N\}$　$\cdots\cdots(1)$　so as to

minimize　$\mathbf{a} = \{\sum_{i\in I_1}(d_i{}^+ + d_i{}^-),\cdots,\ \sum_{i\in I_k}(d_i{}^+ + d_i{}^-),\cdots,\sum_{i\in I_K}(d_i{}^+ + d_i{}^-)\}$　$\cdots\cdots(2)$

subject to　$f_i(\mathbf{X}) - d_i{}^+ + d_i{}^- = f_i{}^*,\ i=1,2,\cdots,I$　$\cdots\cdots(3)$　　$g_j(\mathbf{X}) \leq 0,\ j=1,2,\cdots,J$　$\cdots\cdots(4)$

$d_i{}^+ \geq 0,\ \ d_i{}^- \geq 0,\ \ d_i{}^+ \cdot d_i{}^- = 0,\ i=1,2,\cdots,I$　$\cdots\cdots(5)$

上式において、$\mathbf{a}$ は達成関数、(3)式は目標制約、(4)式はシステム制約という。$d_i{}^+$、$d_i{}^-$は、各々目標値 $f_i{}^*$ に対する超過と不足を表し、差異変数という。(2)式の要素は、I個の目標を重要度に応じて、K個のクラスに分け、目標達成の優先順に並べたものである。この達成関数では、各目標値からの差異の絶対値の和の最小化を考慮しているが、問題によっては、目標値に対する超過や不足を避けたい場合が考えられる。例えば、$f_i(\mathbf{X})$ が変位を表す目的関数であれば、目標値（許容変位）$f_i{}^*$ を超過してはいけないが、$f_i{}^*$ に不足することは構わない。この様な場合には、$d_i{}^+$ だけを(2)式に入れて定式化すればよい。なお、(4)式のシステム制約は、最も高い優先度を与えて目標制約に変えることができるので、本研究でもその様な取扱いを行い、以後の目標制約の個数Iは、(I+J)であると見なす。

３．逐次線形化法による非線形目標計画法の解法

(3)式の $f_i(\mathbf{X})$ を微小変化量 $\Delta x_n = x_n - x_n{}^0$ について線形化すると

$$f_i(\mathbf{X}) \doteqdot f_i(\mathbf{X}^0) + \sum_{n=1}^{N}\{\partial f_i(\mathbf{X}^0)/\partial x_n\}\,\Delta x_n \quad \cdots\cdots(6)$$

Δx_n にムーブリミット制約を付け、x_n に上下限制約を付けると

$$-\varepsilon x_n{}^0 \leq \Delta x_n \leq +\varepsilon x_n{}^0 \quad \cdots\cdots(7) \qquad x_n{}^l \leq x_n \leq x_n{}^u \quad \cdots\cdots(8)$$

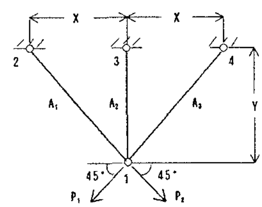

図１．３部材トラス問題

これらを同時に満足する新しいムーブリミットは、

$$X_n{}^L = \min\,(\varepsilon x_n{}^0,\ x_n{}^0 - x_n{}^l) \cdots\cdots(9) \qquad X_n{}^U = \min\,(\varepsilon x_n{}^0,\ x_n{}^u - x_n{}^0) \cdots\cdots(10)$$

上式を用いると、(7),(8)式は、(11)式の様に一つにまとめられ、更に、Δx_n の非負条件は、(12)式となる。

$$-X_n{}^L \leq \Delta x_n \leq +X_n{}^U \quad \cdots\cdots(11) \qquad 0 \leq \Delta x_n + X_n{}^L \leq X_n{}^U + X_n{}^L \quad \cdots\cdots(12)$$

新たに、$\Delta x_n{}^* = \Delta x_n + X_n{}^L$ とおくと、　$\Delta x_n = \Delta x_n{}^* - X_n{}^L$　$\cdots\cdots(13)$

上式を(6)式に代入し、更に、(6)式を(3)式に代入すると、$\Delta x_n{}^*$ を決定変数とする線形目標計画法問題が次の様に定式化出来る。　　find　$\Delta\mathbf{X}^* = \{\Delta x_1{}^*,\cdots,\Delta x_n{}^*,\cdots,\Delta x_N{}^*\}$　$\cdots\cdots(14)$　so as to

minimize　$\mathbf{a}^* = \{\sum_{n=1}^{N} d_n{}^+, \sum_{i\in I_1}(d_i{}^+ + d_i{}^-),\cdots,\ \sum_{i\in I_k}(d_i{}^+ + d_i{}^-),\cdots,\sum_{i\in I_K}(d_i{}^+ + d_i{}^-)\}$　$\cdots\cdots(15)$　subject to

$$\sum_{n=1}^{N}\{\partial f_i(\mathbf{X}^0)/\partial x_n\}\,\Delta x_n{}^* - d_i{}^+ + d_i{}^- = f_i{}^* - f_i(\mathbf{X}^0) + \sum_{n=1}^{N}\{\partial f_i(\mathbf{X}^0)/\partial x_n\}\,X_n{}^L,\ i=1,2,\cdots,I \quad \cdot\cdot(16)$$

$$\Delta x_n{}^* - d_n{}^+ + d_n{}^- = X_n{}^U + X_n{}^L\ ,\ n=1,2,\cdots,N \quad \cdots\cdots\cdots(17)$$

$$d_i{}^+ \geq 0,\ \ d_i{}^- \geq 0,\ \ d_i{}^+ \cdot d_i{}^- = 0\ ,\ i=1,2,\cdots,I \quad \cdots\cdot(18)$$

$$d_n{}^+ \geq 0,\ \ d_n{}^- \geq 0,\ \ d_n{}^+ \cdot d_n{}^- = 0\ ,\ n=1,2,\cdots,N \quad \cdots\cdot(19)$$

この線形問題は、Multi-Phase Simplex Method(1)によって解け、ΔX^* が求まれば X^0 が更新され、原問題における達成関数 $\mathbf{a}$ の値に変化が無くなるまで、この更新が繰り返される。

４．３部材トラスの２目的最適化

図１に示したトラスにおいて、設計変数を部材断面積 $A_1=A_3, A_2$、作用応力度を σ_i、許容応力度を σ_{ai}、節点１の変位を δ、トラスの全体積を V とした時、原２目的問題を

find $\mathbf{A} = \{A_1, A_2\}$ ····(20) so as to minimize $f_1 = \delta(\mathbf{A})$ and $f_2 = V(\mathbf{A})$ ····(21)

subject to $g_i = \sigma_i(\mathbf{A}) - \sigma_{ai} \leqq 0,\ i=1,2,3$ ····(22) $A_1 \geqq 0,\ A_2 \geqq 0$ ····(23)

とする。この問題では、二つの目的は相競合（Conflict）するので、両者のトレードオフ解析から、設計者が最適解を選ばなければならない。変位と体積の目標値を δ_T、V_T として、(1)～(5)式に従って、上の問題を目標計画法問題に変換すると

find $\mathbf{A} = \{A_1, A_2\}$ ····(24) so as to minimize

$\mathbf{a} = \{(d_1^+ + d_2^+ + d_3^+), (d_4^+), (d_5^+)\}$ ····(25a)

subject to G_1: $\sigma_1(\mathbf{A}) - d_1^+ + d_1^- = \sigma_{a1}$ ····(26a)

G_2: $\sigma_2(\mathbf{A}) - d_2^+ + d_2^- = \sigma_{a2}$ ····(26b)

G_3: $\sigma_3(\mathbf{A}) - d_3^+ + d_3^- = \sigma_{a3}$ ····(26c)

G_4: $\delta(\mathbf{A}) - d_4^+ + d_4^- = \delta_T$ ····(26d)

G_5: $V(\mathbf{A}) - d_5^+ + d_5^- = V_T$ ····(26e)

$d_i^+ \geqq 0,\ d_i^- \geqq 0,\ d_i^+ \cdot d_i^- = 0,\ i=1,2,\cdots,5$ ····(27)

$A_{min} \leqq A_n \leqq A_{max},\ n=1,2$ ····(28)

表－１．３部材トラス問題の２目的最適化

ケース		優先順 2	優先順 3	目標値 δ_T (cm)	目標値 V_T (cm³)	結果 収束点	A_1 (cm²)	A_2 (cm²)	σ_1 (kg/cm²)	σ_2 (kg/cm²)	σ_3 (kg/cm²)	δ (cm)	V (cm³)
A	1	δ	V	0.15	15000	M点	25.0	25.0	1000	586	414	0.182	23928
	2	δ	V	0.22	15000	O点	23.2	7.5	1285	1046	239	0.220	18280
B	1	V	δ	0.15	15000	N点	20.0	10.0	1400	1035	365	0.244	16653
	2	V	δ	0.15	18280	O点	23.2	7.5	1285	1046	239	0.220	18280

諸元：$X = Y = 250$ cm, $P_1 = P_2 = 25000\sqrt{2}$ kg （P_1, P_2は同時に作用しない）、$E = 2.1\times10^6$ kg/cm²,
$\sigma_{a1} = \sigma_{a2} = 1400$ kg/cm²（引張）, $\sigma_{a3} = 900$kg/cm²（圧縮）, $A_{max} = 25$ cm², $A_{min} = 5$ cm²
初期値 $A_1 = 10$ cm², $A_2 = 20$ cm²,　優先順１位は応力度目標

(25a)式は、変位目標を体積目標より優先した場合（ケースA）であるが、体積目標を優先したい場合（ケースB）には、(25a)式の代わりに

minimize $\mathbf{a} = \{(d_1^+ + d_2^+ + d_3^+), (d_5^+), (d_4^+)\}$ ····(25b)

とする。(24)～(28)式の問題を、(14)～(19)式に従って線形化し、計算した結果を、表－１、図２、図３に示す。（計算に用いた諸元は表－１の下段に示した） ケースA-1では、変位最小値 $\delta_{min}=0.182$cm を与えるM点が解として得られ、この時、体積は最大値 $V_{max}=23928$cm³ となる。逆に、ケースB-1 では、体積最小値 $V_{min}=16653$cm³ を与えるN点が解として得られ、この時、変位は最大値 $\delta_{max}=0.244$cm となる。ケースA-2 は、δ_{min} と δ_{max} の間の値 $\delta_T=0.22$cm を変位目標値として与えたもので、図２に示す様に解はM点とN点の中間点Oとなる。δ_T の値を δ_{min} と δ_{max} の間で少しずつ変えながら、この様なO点を連ねると、MONを結ぶ線が得られるが、更にこの線上の点の δ と V の値を目的関数空間に移すと、図３に示す様なトレードオフ曲線MONが得られる。ケースB-2 はケースA-2 と逆に、V_{min} と V_{max} の間の値 $V_T=18280$ cm³ を体積目標値として与え、体積目標を優先して最適化した場合で、結果はケースA-2 と一致する。なお、実橋規模のトラスの２目的最適化の計算例については、当日発表の予定である。

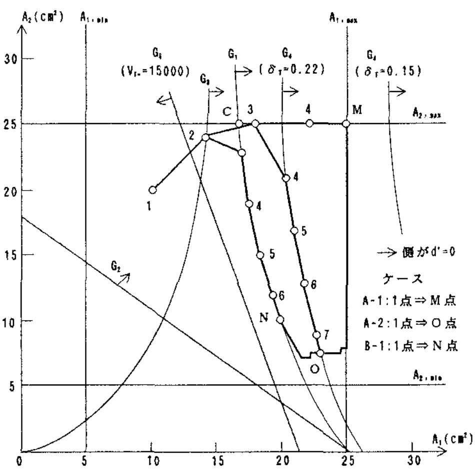

図２．３部材トラス問題の設計空間

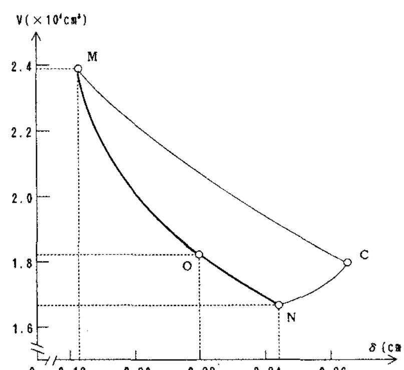

図３．３部材トラス問題の目的関数空間

《参考文献》(1) Ignizio, J.P. : Linear Programming in Single- and Multiple-Objective Systems, Prentice-Hall, 1982