I-176　最小二乗法を用いた大変形ケーブルの解析

熊本大学工学部　正　員　○二木　秀敏
同　上　正　員　小林　一郎
同　上　正　員　三池　亮次

１．はじめに　筆者らは、ケーブル構造の有限変位解析への最適化手法の適用を試み、不安定構造としての大変形ケーブル解析および非抗圧材としてのケーブル部材の処理等においては、２．で述べる増分形の釣り合式を直接解くよりも式の両辺の残差二乗和の最小化を図る方が計算効率が良いことを示した[1]。ここでは、上記以外に、完成系の部材力の算出および初期形状決定問題への最小二乗法の適用も含めて５種類の最適化問題を定式化し、適用計算例を示す。なお、最小二乗法の数値計算には改訂マルカート法を用いた。

２．有限変位解析の基礎式[2]　トラス構造の有限変形の中間状態において、節点に作用する外力と変位がおのおの $\mathbf{p}'$ および $\mathbf{d}'$ であり、変形後の状態において、外力ベクトル $\mathbf{p}'+\Delta\mathbf{p}$ を受け、変位増分が $\Delta\mathbf{d}$ であるものとする。変形後の部材軸力 N で構成される部材応力ベクトルを $\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\Delta\mathbf{r}$ とすると、接続マトリックス $\mathbf{C}'$ および $\mathbf{C}'+\Delta\mathbf{C}$ を用い

$$\mathbf{p}'=\mathbf{C}'\mathbf{r}' \qquad (1)$$

$$\mathbf{p}'+\Delta\mathbf{p}=(\mathbf{C}'+\Delta\mathbf{C})(\mathbf{r}'+\Delta\mathbf{r}) \qquad (2)$$

が成り立つ。また、トラス構造解析の増分形基礎式は次式となる。

$$\Delta\mathbf{p}=(\mathbf{C}'+\Delta\mathbf{C})\Delta\mathbf{r}+\Delta\mathbf{C}\mathbf{r}' \qquad (3)$$

$$\Delta\mathbf{r}=\mathbf{K}\{(\mathbf{C}'+\Delta\mathbf{C})^T\Delta\mathbf{d}-\Delta\mathbf{e}_\theta\} \qquad (4)$$

ただし、$\mathbf{K}$ は部材の剛性マトリックス、$\Delta\mathbf{e}_\theta$ は伸びの付加項である。

３．最小二乗法の適用　以下に５種類の最適化問題を設定する。

１）大変形ケーブルの変位解析

式 (3) の両辺の数値解析残差を

$$\mathbf{v}=\alpha\Delta\mathbf{p}-(\mathbf{C}'+\Delta\mathbf{C})\Delta\mathbf{r}-\Delta\mathbf{C}\mathbf{r}' \qquad (5)$$

とし、$\mathbf{v}$ の平方和を目的関数とする最適設計問題を設定する。

[問題A]（トラス構造の解析 $\alpha=1.0$）

設計変数：　増分変位 $\Delta\mathbf{d}$

目的関数：　$f=\mathbf{v}^T\mathbf{v}\rightarrow min.$　(6)

ケーブル構造においては変形後の釣り合い状態になるまでに一部の部材の軸力がゼロとなった場合、それらの部材は構造解析上は機能しないものと考えられるので、部材を除去する必要が生じる（問題B）。さらに、一度除去した部材が引張材としての機能を回復すれば、これを構造の部材として付加し、解析を続行する必要がある（問題C）。これらは、次のように定式化される。

[問題B]（圧縮部材の除去）

設計変数：　$\Delta\mathbf{d},\ \alpha$

目的関数：　$f=\mathbf{v}^T\mathbf{v}+w^2\rightarrow min.$　(7)

ただし、　$w=N_I=N_I'+\Delta N_I$　(8)

式 (8) は、第 I 部材の軸力を表わし、$w^2\rightarrow min$ より変形後の軸力 $N_I=0$ を求めることとなる。

[問題C]（部材の付加）

設計変数：　$\Delta\mathbf{d},\ \alpha$

目的関数：　$f=\mathbf{v}^T\mathbf{v}+w^2\rightarrow min.$　(9)

ただし、　$w=\dfrac{(q_I-\ell_I)EA_I}{\ell_I}$　(10)

ただし、ℓ_I は現時点における部材 I の両端の節点間距離、q_I は部材 I の除去時の部材長である。

２）完成系の部材力の算出 [問題D]

設計変数：　$\mathbf{r}'$ または、$\mathbf{p}'$

目的関数：　$f=\mathbf{u}^T\mathbf{u}\rightarrow min.$　(11)

ただし、　$\mathbf{u}=\mathbf{p}'-\mathbf{C}'\mathbf{r}'$　(12)

$\mathbf{r}'$ を設計変数としたときは、プレストレス量も含めた部材力の算出が、$\mathbf{p}'$ を設計変数とした場合には所定の部材力を得るのに必要な外力の算定が可能となる。

３）初期形状決定問題 [問題E]

設計変数:　節点座標 $\mathbf{x_0}$

目的関数:　$f=\mathbf{v}^T\mathbf{v}\rightarrow min.$　(13)

ここで、$\Delta\mathbf{d}=[\overline{x}-x_0\ \overline{y}-y_0\ \overline{z}-z_0]^T$ ($\overline{x},\overline{y},\overline{z}$ は完成形状の座標値、x_0,y_0,z_0 は設計変数) であるから、これは $\mathbf{x_0}$ の関数となっている。ただし、変位 $\Delta\mathbf{d}$ を設計変数に採れば [問題A] を用いても同様の計算が可能である。

4．数値計算例　図-1 の解析手順①～③に従って以下の解析を行なう。図-2 にはすべて非抗圧材からなる解析モデルを示したが、完成系の構造解析を［問題D］により行なったものである。これは、ステーケーブル 11 ～ 14 、15 ～ 18 のそれぞれの部材力の合力を垂直成分のみで上向きに 20 tf とし、中間節点 2 ～ 10 に先行荷重として垂直下向きに 20 tf ずつ載荷し、その結果主ケーブルが放物線形状をなしているものである。従って、節点４、８には、外荷重は作用していない。表-1 にはこのときの部材力を示してある。次にこの状態において先行荷重を除荷すると、[問題A] により図-3 に示す初期形状が得られる。また、完成系の状態に垂直下向きに 100 tf 、z 方向に-1 tf の移動荷重を節点２～６に載荷したときの変形過程を図-4(a) ～ (e) に示す。部材 11,13,15,17 については部材力 (単位:tf) を記した。

参考文献　1）小林、三池：ケーブル構造の大変形解析への最適化手法の適用、土木構造・材料論文集、第５号、1990.　2）Miike, Kobayashi, Yamada:Virtual Large Displacement Theorem for Framed Structures,Vol.116,NO.EM2, ASCE, pp.411-428,Feb.1990.

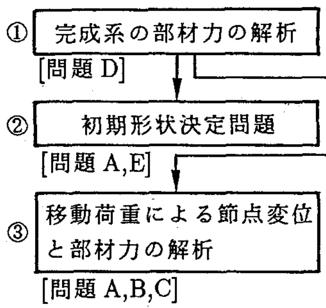

図-1　解析の手順

表-1 完成系の部材力

（単位:tf）

部材番号 (No.)	部材力
1	134.54
2	122.07
3	111.80
4	104.40
5	100.50
6	100.50
7	104.40
8	111.80
9	122.07
10	134.54
11	11.74
12	11.74
13	8.25
14	8.25
15	8.25
16	8.25
17	11.74
18	11.74

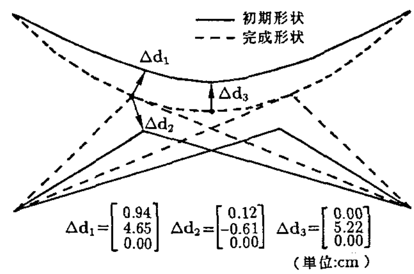

図-3　初期形状

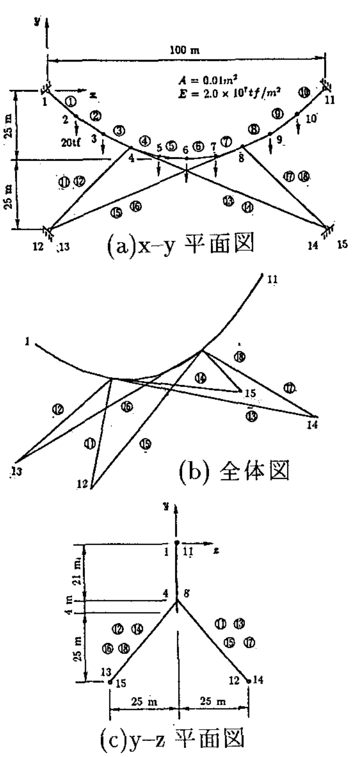

図-2 解析モデル

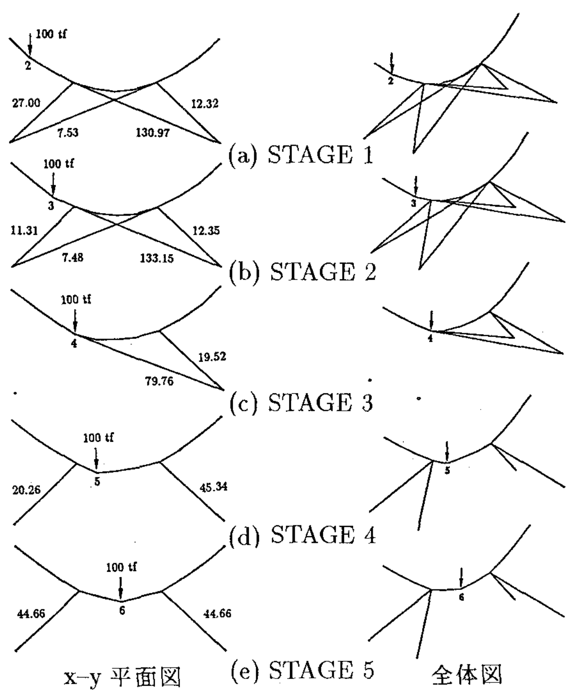

図-4　各荷重段階における変形後の釣り合い状態